

А. А. ИЛЬЮШИН

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Издание третье,
переработанное и дополненное

Допущено Государственным комитетом
СССР по народному образованию в ка-
честве учебника для студентов универ-
ситетов, обучающихся по специальности
«Механика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1990

ББК 22.25
И 45
УДК 531.01

Рецензенты:

кафедра теории упругости ЛГУ,
профессор *В. С. Ленский*

И 45 Ильюшин А. А.
Механика сплошной среды: Учебник. — 3-е изд. — М.:
Изд-во МГУ, 1990. — 310 с.
ISBN 5—211—00940—1.

В учебнике (2-е изд. — 1978 г.) рассматриваются статистическое обоснование основных понятий и полевых функций механики сплошной среды (МСС), даны теория деформаций, напряжений и процессов деформации и нагружения в окрестности точки тела, законы сохранения и функциональные представления термодинамических функций, теория определяющих соотношений и уравнений состояния, замкнутые системы уравнений МСС и общие постановки краевых задач. Даны общие преобразования квазилинейных уравнений МСС, упрощающие анализ и нахождение их решений. Подробно излагаются теория классических сред, сред со сложными физическими свойствами, описано действие электромагнитного поля, а также дана теория размерности и подобия с примерами ревизионного анализа уравнений МСС.

Для студентов университетов и вузов по специальности «механика».

И 1803040000(4309000000)—086
077(02)—90 85—90

ББК 22.25

ISBN 5—211—00940—1

© Ильюшин А. А.
1990

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика сплошной среды (МСС) — раздел теоретической физики, в котором изучаются макроскопические движения твердых, жидких и газообразных сред. В ней вводятся фундаментальное понятие материального континуума и полевые характеристические функции, определяющие внутреннее состояние, движение и взаимодействие частиц среды, взаимодействия между различными контактирующими средами. Для этих функций устанавливаются конечные, дифференциальные и другие функциональные уравнения, представляющие физические свойства среды в виде, определяющих соотношений, и законы сохранения массы, импульса, энергии и баланса энтропии. Выясняются начальные и граничные условия, при которых все характеристические функции в средах могут быть найдены чисто математически аналитическими и числовыми методами.

Исторически МСС развивалась параллельно с аналитической механикой системы материальных точек и абсолютно твердого тела. Но ее основные понятия полей: плотности массы, векторов перемещения и скорости среды, тензоров внутренних напряжений, деформаций и процессов деформации, плотности кинетической и внутренней энергии и энтропии, а также законы сохранения и уравнения состояния — не могут быть получены как следствия из аналитической механики и термодинамики.

МСС имеет свою независимую аксиоматику, свои специфические экспериментальные методы изучения макроскопических свойств среды и развитые математические методы; она позволяет с удивительной точностью предсказывать макроскопические явления в природе, анализировать и выбирать параметры различных проектируемых аппаратов, сооружений, конструкций и процессов. МСС — обширная и очень разветвленная наука, включающая теорию упругости, вязкоупругости, пластичности и ползучести, гидродинамику, аэродинамику и газовую динамику с теорией плазмы, динамику сред с неравновесными процессами изменения структуры и фазовыми переходами. Естественно, что возникла обширная литература по всем этим разделам МСС, ее приложениям в машиностроении, строительстве, металлургии, горном деле, исследованиях строения Земли и Космоса, прогнозированию землетрясений, погоды, приливов и многим другим приложениям.

Созданные в первой половине XIX в. работами Коши, Навье, Пуассона, Сен-Венана... *теория упругости и гидродинамика* (см. гл. IV) до недавнего времени представляли главное содержание МСС: единые для жидкостей и упругих тел представления и определения внутренних сил и перемещений в теории напряжений и деформаций (гл. II), связь между напряжениями и деформациями

в виде обобщенных законов упругости и вязкости (гл. IV), различные формы уравнений движения, постановки, методы и решения многообразных проблем и задач естествознания и техники.

В середине XX в. в теории пластичности выработаны общие принципы ее построения, и произошло существенное обогащение и развитие основ МСС. Уже в начале столетия стало ясно, что «законы» упругости и вязкости приближенно представляют уравнения состояния сред лишь в определенных диапазонах параметров движения, но не представляют их, например, в пластической и вязкоупругой области деформаций металлов и полимеров, в области неоднородных турбулентных движений вязких жидкостей и газов с большими скоростями и т. д. *Постулатом макроскопической определмости* в МСС устанавливается, что в малых макрочастицах любых сплошных сред в момент времени t напряжения, энтропия, энергия определяются не мгновенными (при t) значениями деформации, скоростей деформаций и температуры, а всеми их значениями на некотором интервале времени $t_0 \leq \tau \leq t$, т. е. процессом; что заданные на интервале $t_0 \leq \tau \leq t$ в виде функций времени τ тензор деформации и температура частицы однозначно представляют *термомеханический макропроцесс* (гл. III). Следовательно, в общем случае напряжения и тепловыделение среды выражаются характерными для нее функционалами процесса, а не функциями его мгновенных значений (при $\tau = t$).

Поскольку классическая теория деформаций, напряжений и уравнений движения Коши—Навье—Пуассона, а также эйлерово и лагранжево представления движения сплошной среды сохраняются в основах МСС и в наше время и в будущем, в гл. I учебника приводится статистическое физическое обоснование понятия материального континуума и функции поля в нем, причем на наиболее далекой от непрерывной сплошной среды статистической механической системе материальных точек. Излагаемые позже в гл. II и III основы МСС, аксиоматические понятия скорости движения, плотностей массы и энергии, энтропии и количества тепла в гл. I возникают как статистические понятия, получают естественную статистическую трактовку. Этот результат служит еще одним основанием для применения методов МСС к весьма сложным системам тел.

Оглавление дает достаточное представление о структуре и содержании учебника. Для многих сплошных сред и тел с простыми и сложными физическими свойствами изучающий узнает полные замкнутые системы разрешающих уравнений, типичные граничные условия и условия на волновых фронтах, постановки краевых задач, простые методы их анализа на основе теории размерностей и подобия и получит доступ к свободной проработке и активному использованию любого из перечисленных выше разделов МСС; но что, пожалуй, более важно — изучающий научится методам построения *фундаментальных математических моделей механики сплошных сред*; познакомится с методом построения полных систем уравнений МСС, особенно уравнений состояния среды, т. е. в определенной мере научится переводить на язык математики и ЭВМ интересующие естествознание и практику новые явления природы, процессы в новых материалах и средах с заранее неизвестными физико-механическими свойствами. Поэтому автор придает значение гл. III и V, в которых разъясняются особенности взаимодействия термомеханических и электромаг-

нитных полей и общие принципы построения математических моделей МСС для сложных сред.

В качестве учебника по МСС эта книга вместе с учебным пособием А. А. Ильюшина, В. А. Ломакина, А. П. Шмакова «Задачи и упражнения по механике сплошной среды» (Изд-во МГУ, 1979) по-прежнему представляет полный курс МСС, читавшийся автором в Московском государственном университете по специальности «механика» для студентов механико-математического факультета и слушателей ФПК.

Он может быть учебником и по годовому курсу МСС (64 часа лекций) с сопровождающими в таком же объеме упражнениями, если аэрогидромеханика и механика деформируемого твердого тела выделены в самостоятельные курсы.

Учитывая, что этот учебник уже получил некоторое распространение среди студентов и аспирантов механических, строительных, машиностроительных и других специальностей ВТУЗов и что введение курсов лекций с упражнениями по МСС в учебные планы ВТУЗов — естественный путь повышения уровня обучения и научной квалификации инженеров, автор стремился избегать в изложении математических излишеств и усложнений.

Сохраняя краткость, даже конспективность изложений в предлагаемом издании, существенно обновлено содержание и усовершенствовано изложение во всех разделах, особенно в гл. III, V, VI.

Автор благодарен асс. Е. Д. Мартыновой — за тщательную проверку и исправление ошибок в текстах и выкладках, сотрудницам кафедры Л. С. Харьковской, В. И. Шестаковой, Т. М. Серединой — за скорую техническую подготовку рукописи, с. н. с. А. Д. Пучковой — за редактирование и оформление, с. н. с. Э. А. Леоновой — за переработку § 25, проф. М. Ш. Исраилову, доц. А. П. Шмакову — за обсуждения и полезные советы, доц. факультета ВМК Г. А. Ильюшиной — за существенную доработку § 10.

Глава I

СИСТЕМА ЧАСТИЦ И КОНТИНУУМ

Физическое тело в классической статистической механике обычно представляют в виде системы большого числа частиц, взаимодействующих между собой и с пограничными телами и находящихся в поле внешних сил. Для такого тела предполагаются справедливыми классические законы механики системы материальных точек (или законы квантовой механики). Предполагается, что любая частица системы взаимодействует с границей лишь в непосредственной близости к ней. Взаимодействие между любыми двумя частицами системы не допускает их соударения, но позволяет им как угодно удаляться. Например, потенциал и центральную силу взаимодействия двух электрически нейтральных атомов часто представляют в виде «6—12» Леннарда—Джонса:

$$U = 2k\Theta_1 \left[-\left(\frac{a}{r}\right)^6 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^{12} \right] + U_{\infty},$$

$$F = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{12k\Theta_1}{a} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^7 - \left(\frac{a}{r}\right)^{13} \right],$$

где Θ_1 — характеристическая, выраженная в кельвинах (K) температура взаимодействия атомов, $k = 1,38 \cdot 10^{-21}$ Дж·К⁻¹ — постоянная Больцмана, r — расстояние между атомами, a — равновесное расстояние ($F=0$). При $r < a$ сила F — отталкивающая ($F \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 0$); при $r > a$ — притягивающая; при $1,11a > r > a$ сила притяжения F возрастает, а затем ($r > 1,11a$) убывает по мере удаления частиц, составляя менее 1% от максимальной уже при $r = 2a$. Силы притяжения существенны для объяснения агрегатных состояний. Сила взаимодействия частиц F , следовательно, возникает при сближении и исчезает при удалении на расстояния порядка a (рис. 1.1). Величину d порядка a называют диаметром атома, хотя масса его сосредоточена в ядре значительно меньшего диаметра. Модель атома представляет собой точечную массу, заключенную в упругую, почти безынерционную, шаровую область диаметра d , которая имитирует электронное облако. В квантовой механике свойства модели уточняются введением заряда, механического и магнитного моментов и т. д.

Движение системы большого числа взаимодействующих частиц во внешнем силовом поле может представлять движение и свойства

тела в различных агрегатных состояниях. Моделью твердого тела при сравнительно низких и нормальных температурах и давлениях является система почти плотно упакованных частиц, совершающих небольшие тепловые колебания около состояния равновесия; моделью газа — система удаленных (на расстояния $r \gg d$) частиц, взаимодействующих только при «соударениях», т. е. сближениях на расстояния порядка диаметра частиц d и, следовательно, совершающих хаотическое движение. Охлаждать систему — значит уменьшать кинетическую энергию хаотического движения, нагревать — увеличивать. Охлаждение и нагревание возможно за счет внешнего силового поля. При охлаждении системы — газа — в результате соударения двух частиц с некоторой малой энергией происходят «захваты», система становится жидкостью, а при дальнейшем охлаждении переходит в твердое тело с колебаниями частиц около положения устойчивого равновесия.

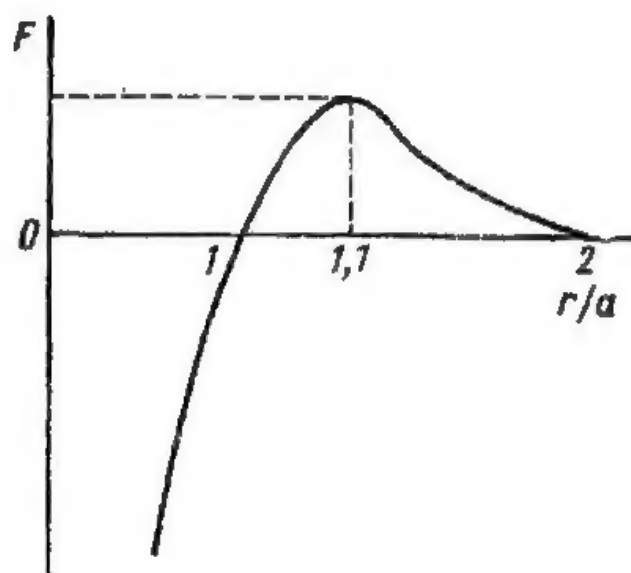


Рис. 1.1

Приведенное качественное описание может быть дополнено количественными методами аналитической механики системы материальных точек, но очень велико число материальных точек (скажем, порядка 10^{20} в 1 см^3), и потому информация об их индивидуальных движениях практически ничего не говорит о макроскопических свойствах движения тела. Специальный подход к этой проблеме дают методы статистической механики, позволяющие ввести необходимые в МСС основные понятия — плотности, скорости, внутренних напряжений, энергии, температуры, энтропии и количества тепла.

В механике сплошной среды тело представляют в виде некоторой субстанции, называемой материальным континуумом, непрерывно заполняющей объем геометрического пространства. Бесконечно малый объем тела также называется частицей. Феноменологически вводятся понятия плотности, перемещения и скорости, внутренней энергии, температуры, энтропии и потока тепла как непрерывно дифференцируемых функций координат и времени. Вводятся фундаментальные понятия внутренних напряжений и деформаций и постулируется существование связи между ними и температурой, отражающей в конечном счете статистику движения и взаимодействия атомов. В МСС используются основные уравнения динамики системы и статистической механики, в первую очередь законы сохранения массы, импульса, энергии и баланса энтропии. Обоснование этого и установление соответствия

вводимых феноменологических и статистических одинаковых понятий и величин целесообразно для более полного понимания и возможно на основе статистической механики. Некоторым вопросам взаимосвязи аналитической механики, статистической механики и МСС посвящена эта глава.

§ 1. О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Рассмотрим свободную от связей систему $N=n/3$ материальных точек, обладающую, следовательно, $n=3N$ степенями свободы. Прямоугольные декартовы координаты любой k -й точки обозначим $\mathbf{x}_k=(x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k})$; $m_{(k)}=m_{3k-2}=m_{3k-1}=m_{3k}$ — ее масса. Движение системы определяется законом Ньютона: $m_i \ddot{x}_i = \mathcal{F}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). Пусть сила $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}'_i + \mathcal{F}^e_i$, состоящая из сил взаимодействия с другими точками системы \mathcal{F}'_i и с внешним полем — \mathcal{F}^e_i , складывается из потенциальной $\mathcal{F}_{iu} = -\partial U / \partial x_i$, $U = U(x_1, \dots, x_n, t)$ и непотенциальной F_i .

Функцией Лагранжа системы называется

$$L(x, \dot{x}, t) = K(\dot{x}) - U(x, t), \quad K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2, \quad (1.1)$$

где K — кинетическая энергия системы. Уравнения движения можно записать в виде уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

Внутренние силы (взаимодействия частиц) \mathcal{F}'_i предполагаем центральными и имеющими потенциал $U'(x, t)$, внешние — частично потенциальными: $\mathcal{F}^e_i = -\partial U / \partial x_i + F_i$. Из уравнений движения точки в векторной форме

$$m_{(k)} \ddot{\mathbf{x}}_k = \mathcal{F}'_{(k)} + \mathcal{F}^e_{(k)} = \mathcal{F}_{(k)} \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (1.3)$$

известными процедурами получим теорему о движении центра масс системы

$$\dot{\mathbf{Q}} \equiv M \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathcal{F}^e, \quad \mathbf{r}_C = \sum m_{(k)} \mathbf{x}_k / M,$$

где $M = \sum m_{(k)}$ — масса системы, \mathcal{F}^e — главный вектор всех внешних сил, \mathbf{r}_C — радиус-вектор центра масс. Затем получим теорему о кинетическом моменте, или о моменте количества движения

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{L}^e,$$

где $\dot{\mathbf{G}}$ — кинетический момент системы, \mathbf{L}^e — главный момент всех внешних сил:

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \times m_{(k)} \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k = \dot{\mathbf{x}}_k, \quad \mathbf{L}^e = \sum \mathbf{x}_k \times \mathcal{F}_{(k)}^e.$$

Допустим, что на интервале времени движения системы $N = n/3$ материальных точек $0 \leq t \leq \tau$ при $\tau \rightarrow \infty$ существуют средние значения

$$\tilde{K} = \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} K dt \right)_{\tau \rightarrow \infty},$$

$$\tilde{B} = - \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{1}{2} \mathcal{F}_{(k)} \mathbf{x}_k dt \right)_{\tau \rightarrow \infty},$$

называемые: \tilde{K} — средней кинетической энергией системы, \tilde{B} — вириалом (в некотором смысле — средней работой системы). Допустим еще, что для любого i

$$\left(\frac{1}{\tau} [(x_i \dot{x}_i)_{t=\tau} - (x_i \dot{x}_i)_{t=0}] \right)_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

т. е., например, x_i, \dot{x}_i ограничены по модулю. Тогда, умножая уравнение (1.3) на $\mathbf{x}_k dt/2$, интегрируя по t от 0 до τ и суммируя по всем k , получим теорему вириала:

$$\tilde{K} = \tilde{B}. \quad (1.4)$$

Это следует из преобразования $\mathbf{x}_k \ddot{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{x}_k \dot{\mathbf{x}}_k)' - \dot{\mathbf{x}}_k^2$. Если силы \mathcal{F}_i имеют потенциал, причем потенциальная энергия $U(\mathbf{x})$ является однородной формой от x_i степени α , то теорема вириала дает $2\tilde{K} = \alpha \tilde{U}$, а в случае квадратичной формы $U(\alpha=2)$ $\tilde{K} = \tilde{U}$, т. е. средние кинетическая и потенциальная энергии одинаковы.

Ниже увидим, что для большой системы ($N \gg 1$), заключенной в небольшом объеме пространства, в среднем неподвижной, т. е. при $\mathcal{F}^e, \mathbf{L}^e, \mathbf{Q}, \mathbf{G}$ равных нулю, наблюдаемыми в макроскопических опытах функциями координат и скоростей точек системы $(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$, целесообразно называть их средние значения по времени в некотором характерном для системы интервале времени $\tau = \tau_s$. Соотношение (1.4), например в виде $\tilde{K} = \tilde{U}$, относится при этом к уравнениям состояния системы в целом и проверяется непосредственно в макроопытах.

Функция Лагранжа полностью характеризует рассматриваемую систему в отношении сил взаимодействия между частицами и потенциальных сил, действующих на них со стороны внешнего

поля. Поэтому составление выражения функции Лагранжа представляет основную задачу механики системы. Все необходимые дифференциальные уравнения движения находятся формально из уравнений Лагранжа (1.2).

Введем новые переменные — импульсы и координаты:

$$p_i = m_i \dot{x}_i, \quad q_i = x_i;$$

тогда

$$L = L(\dot{q}, q, t) = K(\dot{q}) - U(q, t),$$

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m_i}, \quad \mathcal{F}_{iU} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Легко видеть, что

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

Функцией Гамильтона, зависящей от координат q_i и импульсов p_i , называется

$$H \equiv \sum p_i \dot{q}_i - L. \quad (1.6)$$

При этом предполагается, что система n уравнений (1.5) разрешена относительно \dot{q}_i , и эти выражения подставлены в функцию Лагранжа и первую сумму формулы (1.6). В случае декартовых координат построение функции Гамильтона системы является элементарным. Криволинейные координаты часто более удобны для анализа динамики систем.

Пусть n независимых криволинейных координат (называемых также лагранжевыми координатами) определяют все декартовы x_i , число которых также $3N$. Пусть дано преобразование

$$x_j = x_j(q_1, \dots, q_n), \quad \dot{x}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.7)$$

Тогда

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} k_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (1.8)$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \sum_{l=1}^n m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial q_j}.$$

Следовательно, кинетическая энергия остается квадратичной однородной функцией скоростей \dot{q}_i , но коэффициенты k_{ij} зависят от координат q_i .

Обобщенные непотенциальные силы Q_i , соответствующие координатам q_i , находятся из тождественности выражения виртуальной работы в декартовой и криволинейной системе координат:

$$\sum_{k=1}^{3N} F_k \delta x_k = \sum_{i=1} Q_i \delta q_i, \quad \delta x_k = \sum_{i=1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i,$$

$$\sum_{k=1}^{3N} F_k \sum_{i=1} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1} \left(\sum_{k=1}^{3N} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1} Q_i \delta q_i,$$

откуда находим

$$Q_i = \sum_{k=1}^{3N} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}.$$

Можно доказать, что уравнения Лагранжа (1.2) при замене координат сохраняют прежний вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i; \quad L = L(\dot{q}_i, q_i, t) = K(q, \dot{q}) - U(q, t). \quad (1.9)$$

Построение функции Гамильтона. Функция Лагранжа $L = L(\dot{q}, q, t)$ уже выражена через координаты q_i и скорости \dot{q}_i . Назовем обобщенным импульсом, соответствующим координате q_i , величину (1.5)

$$p_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} \dot{q}_j \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

При построении функции Гамильтона H переменные q_i, p_i принимаются за новые независимые между собой искомые функции времени ($2n$ функций от t). По определению $H(p, q, t)$ и свойству однородных квадратичных форм с учетом (1.9) получим функцию Гамильтона системы, выраженную через обобщенные координаты, импульсы и время

$$H = H(p, q, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = K + U(q, t), \quad (1.10)$$

где K выражается явно с помощью матрицы \bar{k}_{ij} , обратной k_{ij} :

$$\sum_{m=1}^n \bar{k}_{im} k_{jm} = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad 2K = \sum_{i,j=1}^n \bar{k}_{ij} p_i p_j$$

(δ_{ij} называется символом Кронекера).

Теперь n уравнений Лагранжа (1.9), которые определяют координаты и каждое из которых — дифференциальное уравнение второго порядка по времени, можно привести к системе $2n$ уравнений первого порядка для q_i и p_i (при $Q_i=0$):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.11)$$

Эта система $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по t , разрешенная относительно первых производных от координат и импульсов, называется *уравнениями Гамильтона*.

Найдем полную производную по времени от функции Гамильтона

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt.$$

На основании (1.11)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Рассматриваемая нами система называется *консервативной*, если силы взаимодействия между частицами и силы внешнего поля имеют потенциал, не зависящий явно от времени: $U=U(q)$. В этом случае U представляет потенциальную энергию системы и согласно (1.10) $H(p, q)$ — полную энергию, причем $\partial H/\partial t=0$. Следовательно,

$$H=K+U=E=\text{const}. \quad (1.12)$$

В декартовых ортогональных координатах для консервативных систем этот закон имеет выражение

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} p_i^2 + U(q) = E = \text{const}. \quad (1.12')$$

Если главный вектор \mathcal{F}^e и главный момент \mathbf{L}^e всех внешних сил, действующих на систему, равны нулю, то из (1.3) получаем интегралы количества движения и момента количества движения системы (два векторных интеграла):

$$\mathbf{Q} = \text{const}, \quad \mathbf{G} = \text{const}.$$

Вместе с интегралом энергии (1.12) для консервативных систем при этом имеем семь скалярных интегралов движения.

В общем случае система $2n$ дифференциальных уравнений (1.11) имеет $2n$ независимых интегралов, которые можно записать в виде

$$\mathcal{J}_m(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n; t) = C_m \quad (m=1, 2, \dots, 2n). \quad (1.13')$$

Определение их представляет сложную проблему, например, уже при $n=9$ — известную задачу трех тел. Постоянные интегрирования C_m в классической механике находятся по заданным начальным условиям

$$t=t_0: p=p_0, (p_i=p_{i0}); q=q_0, (q_i=q_{i0}); C_m=\mathcal{J}_m(p_0; q_0; t_0). \quad (1.13)$$

В статистической механике вместо задачи определения всех истинных импульсов p_i и координат q_i частиц системы в момент t ставится совсем другой вопрос — о статистических свойствах движения нашей системы, определяемого уравнениями Гамильтона при вполне заданной $H(p, q, t)$, если начальные условия (1.13) статистические. Рассматривается непрерывное множество начальных условий (1.13) с заданным интервалом их изменения и вводится функция $f_c(C_1, C_2, \dots, C_{2n})$ плотности их распределения, которая согласно (1.13') является функцией всех p_i, q_i и t :

$$f_c(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_{2n}) = f(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n; t). \quad (1.14)$$

По построению она постоянна для истинного движения системы при любых начальных условиях, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = 0.$$

На основании уравнений движения (1.11) получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных для функции f

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (1.15)$$

называемое уравнением Лиувилля. Это основное уравнение статистической механики. Ниже физическая трактовка $f(p, q, t)$ рассмотрена более подробно, и многие выводы получены непосредственно из уравнения (1.15).

Теперь ставится задача: пояснить некоторые основные идеи метода статистической механики при постановке и решении задач динамики сложных систем, подчиняющихся законам классической механики, и вывести некоторые законы, принимаемые в МСС аксиоматически. Рассматривается свободная замкнутая механическая система S_N , состоящая из N частиц, взаимодействующих между собой и с внешними телами, имеющая $n \geq 3N$ степеней свободы. Предполагается, что число N и структура каждой частицы не изменяются с течением времени, т. е. число и геометрический смысл лагранжевых координат q_i ($i=1, 2, \dots, n$) сохраняются. Взаимодействия частиц между собой и с внешними телами

предполагаются потенциальными. Короче, рассматривается свободная механическая система тел (частиц) S_N с $n \geq 3N$ степенями свободы, для которой известна функция Гамильтона (1.10)

$$H_N(p, q, \mu) = K(p, q) + U(q, \mu), \quad (1.16)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)$ — набор координат $p = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$ — набор импульсов, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ — набор внешних параметров (координат), определяющих положение взаимодействующих с S_N внешних тел. Параметры μ могут зависеть от t^* . Координаты и импульсы системы, т. е. $2n$ функций времени $q_i(t)$, $p_i(t)$, удовлетворяют $2n$ обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка (1.11).

Вопрос о соответствии рассматриваемой системы S_N конкретным физическим средам в общем виде является сложным и не будет рассматриваться. Достаточно отметить, что во многих случаях такое соответствие существует. Продолжаются многочисленные исследования по развитию теории сплошной среды на основе классической и квантовой статистической механики, и идеи статистического метода являются общими.

В МСС (как и ряде других разделов теоретической физики) представляют интерес системы S_N , для которых имеют физический смысл понятия в некотором смысле средних значений величин плотности массы, скорости движения, кинетической энергии и других, а также средние отклонения от средних и т. д., т. е. системы S_N с закономерными статистическими свойствами.

Любое частное и все возможные движения системы S_N вполне определяются $2n$ интегралами движения (1.13'), содержащими $2n$ произвольных постоянных C_m ($m = 1, 2, \dots, 2n$). *Макроскопическими свойствами системы можно считать только средние статистические ее свойства.* Следовательно, статистическими свойствами должен обладать набор произвольных постоянных C_m , т. е. на основании (1.13) набор начальных условий системы. Этот необычный для классической механики взгляд имеет глубокий физический смысл и позднее пояснен на примере так называемого равновесного состояния системы.

Дадим сначала аксиоматическую постановку задачи о движении рассматриваемой замкнутой системы в классической статистической механике, содержащую следующие основные определения и аксиомы системы S_N .

1. Функция Гамильтона (1.16) задана, т. е. кинетическая энергия $K(p, q)$ и потенциал всех внутренних и внешних сил $U(q, \mu)$ детерминированно заданы как функции своих аргументов p, q, μ , причем весь набор внешних параметров μ во времени t также задан, следовательно, является детерминированным.

* Быть очень медленно изменяющимися по t .

2. Свойства функции Гамильтона $H_N(p, q, \mu)$, внешних параметров $\mu(t)$ и множества всех возможных для S_N начальных условий (1.13) (иначе — множества всех значений интегралов движения (1.13')) таковы, что существуют определенные постоянные или меняющиеся во времени область Γ_q изменения координат системы и область Γ_p изменения импульсов системы,

$$q \in \Gamma_q, \quad p \in \Gamma_p, \quad (1.17')$$

и их объединение Γ — область изменения параметров (p, q) системы

$$\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q, \quad (p, q) \in \Gamma, \quad (1.17)$$

причем параметры (p, q) внутри области Γ могут принимать все значения. Иначе говоря, существует связная область Γ $2n$ -мерного пространства E_{2n} импульсов p и координат q , внутри которой заключены и могут принимать все значения импульсы и координаты (p, q) системы S_N .

3. В каждый момент времени t внутри области Γ существует некоторая однозначная непрерывно дифференцируемая по аргументам функция $f_N(p, q, t)$, определяющая плотность вероятности нахождения системы S_N внутри фазового объема $d\Gamma$, для простых S_N (при $n=3N$) равного

$$d\Gamma \equiv dp dq \equiv dp_1 dp_2 \dots dp_n dq_1 dq_2 \dots dq_n, \quad (1.18)$$

взятого в окрестности состояния (точки) с координатами $(p, q) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, так что вероятность нахождения системы S_N в объеме $d\Gamma$ равна

$$f_N(p, q, t) d\Gamma = f_N(p, q, t) dp dq,$$

а вероятность нахождения системы во всем объеме Γ равна единице (при любом t):

$$\int_{\Gamma} f_N(p, q, t) d\Gamma = 1. \quad (1.19)$$

При этом предполагается, что граница области Γ , обозначаемая $(\Gamma)_{\text{гр}}$, для системы S_N недостижима, иначе — вероятность выхода системы (хотя бы одной из координат p_i, q_i) на $(\Gamma)_{\text{гр}}$ равна нулю:

$$f_N(p, q, t) = 0 \quad \text{для } (p, q) \in (\Gamma)_{\text{гр}}. \quad (1.20)$$

4. Функция $f_N(p, q, t)$ удовлетворяет внутри Γ дифференциальному уравнению Лиувилля (1.15), иначе

$$\dot{f}_N \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} - [H_N; f_N] = 0, \quad (p, q) \in \Gamma, \quad (1.21)$$

где $[H_N; f]$ называется скобкой Пуассона:

$$[H_N; f_N] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H_N}{\partial q_i} \frac{\partial f_N}{\partial p_i} - \frac{\partial H_N}{\partial p_i} \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \right]. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.21) — линейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных по p, q, t с переменными коэффициентами, выраженными через функцию Гамильтона, т. е. зависящими от p, q и $\mu(t)$.

Из теории таких уравнений известно, что при весьма общих предположениях решение (функция $f_N(p, q, t)$) однозначно определяется по ее значению при каком-нибудь фиксированном $t=t_0$, т. е. начальным условием

$$t=t_0, f_N(p, q, t_0) = f_N^0(p, q), \quad (1.23)$$

где $f_N^0(p, q)$ задана.

Движение системы S_N в статистической механике считается известным, если для любого t известна функция $f_N(p, q, t)$. Физический смысл такого определения установлен дальнейшими определениями, теоремами и гипотезами. Дадим формальное сопоставление аналитической и статистической механики в виде табл. 1 (в обоих случаях предполагается, что задана одна и та же функция Гамильтона).

Цель решения задачи аналитической механики для системы S_N состоит в том, чтобы найти одну заданную функцию импульсов и координат $\mathcal{F}(p, q)$ (или набор таких функций) в любой момент времени t , например найти радиус-вектор k -й частицы $\mathbf{r}_k(q)$, ее кинетическую энергию $K_k(p, q)$, относительное положение l -й и k -й частиц $\mathbf{r}_l(q) - \mathbf{r}_k(q)$, $1 \leq k, l \leq N$, и т. д. Цель достигается, если из первого столбца таблицы найденные по начальным условиям функции $p(t), q(t)$ внести в выражение функции $\mathcal{F}(p, q)$:

$$\tilde{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(p(t), q(t)).$$

Цель решения задачи статистической механики применительно к МСС — в определении средних статистических значений тех же или других заданных функций $\mathcal{F}(p, q)$ в различных фиксированных объемах или точках фазового пространства, например в точке x , в различные моменты времени t или интервалы времени. Эти средние на основании специальной эргодической гипотезы трактуются как макроскопические параметры, которые можно измерить в опытах.

Средним статистическим значением заданной функции $\mathcal{F}(p, q)$ в момент t по всей области Γ называется

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \langle \mathcal{F}(p, q) \rangle_\Gamma \equiv \langle \mathcal{F}(p, q) \rangle = \int_\Gamma \mathcal{F}(p, q) f_N(p, q, t) d\Gamma, \quad (1.24)$$

Т а б л и ц а 1

Искомые функции; уравнения, условия	Классическая механика	Статистическая механика
Основные искомые функции	$2n$ функций времени $t, p(t), q(t)$: $p_i(t), q_i(t), i = 1, 2, \dots, n$	одна функция $2n + 1$ переменных $f_N(p, q, t)$: $f_N(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n; t)$
Определяющие уравнения	$2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_N}{\partial q}, \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_N}{\partial p}$: $\dot{p}_i = -\frac{\partial H_N}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H_N}{\partial p_i},$ $i = 1, 2, \dots, n$	одно дифференциальное уравнение в частных производных $\dot{f}_N(p, q, t) = 0$: $\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H_N}{\partial q_i} \frac{\partial f_N}{\partial p_i} + \frac{\partial H_N}{\partial p_i} \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \right) = 0$
Начальные условия	$2n + 1$ констант (t^0, q_i^0, p_i^0) $t = t_0, p = p^0, q = q^0$: $p_i = p_i^0, q_i = q_i^0,$ $i = 1, 2, \dots, n$	одна функция $2n$ переменных f_N^0 $t = t_0$ $f_N(p, q, t_0) = f_N^0(p, q)$: $f_N(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n, t_0) =$ $= f_N^0(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$
Другие искомые функции (свойства)	детерминированное значение заданной функции $\mathcal{F}(p, q)$ при различных t	среднее значение функции $\mathcal{F}(p, q)$ в момент t

т. е. математическое ожидание $\mathcal{F}(p, q)$ по Γ с весовой функцией f_N . Это среднее зависит от времени (так как f_N зависят от t) и понимается как среднее $\mathcal{F}(p, q)$ во всем фазовом пространстве, занятом системой в момент t при всех возможных в момент t скоростях всех частиц системы S_N . Например, среднее значение координаты q_1 системы в момент t равно следующей функции t :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(t) &= \langle q_1 \rangle = \int_{\Gamma} q_1 f_N d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} q_1 f_N(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n, t) dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n. \end{aligned}$$

Всякое другое среднее значение функции $\mathcal{F}(p, q)$ в момент t (в точке x пространства и т. п.) определяется как *условное*: в момент t из всей области Γ выделяется подобласть $\Gamma' \in \Gamma$ раз-

мерности $\leq 2n$ и вычисляется математическое ожидание $\mathcal{F}(p, q)$ по этой подобласти с весовой функцией f_N :

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle_{\Gamma'} = \int_{\Gamma'} \mathcal{F}(p, q) f_N(p, q, t) d\Gamma'. \quad (1.25)$$

Для МСС имеют особое значение условные средние значения некоторых функций $\mathcal{F}(p, q)$ в фиксированной точке $x \equiv r$ физического пространства, включающие требование, чтобы радиус-вектор центра масс фиксированной k -й частицы системы x_{ck} равнялся x : $x_{ck}(p, q) \equiv x$. Это условие накладывает ограничение на p, q , т. е. выделяет область Γ'_k размерности $2n-3$; фактическое вычисление $d\Gamma'_k$ и границы области Γ'_k часто связано со сложными (хотя и не принципиальными) вычислениями. Поэтому, фиксируя внимание на принципиальной стороне статистического метода, в дальнейшем в этой главе рассматриваются только простые замкнутые системы S_N , т. е. такие, для которых $n=3N$ и криволинейные координаты q совпадают с декартовыми x . Обозначим

$$r \equiv x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \sum_{\alpha=1}^3 x^\alpha e_\alpha \quad (1.26)$$

радиус-вектор точки пространства (e_α — ортогональный декартов репер),

$$q_k = \sum_{\alpha=1}^3 q_k^\alpha e_\alpha \quad (k=1, 2, \dots, N), \quad (1.27)$$

$$p_k = m_k v_k = \sum_{\alpha=1}^3 p_k^\alpha e_\alpha, \quad p_k^\alpha = m_k v_k^\alpha,$$

радиус-вектор, его декартовы координаты (q_k^α), импульс и его компоненты (p_k^α), массу (m_k) и скорость (v_k) k -й частицы (материальной точки). $6N$ параметров $p(p_k^\alpha), q(q_k^\alpha)$ ($\alpha=1, 2, 3; k=1, 2, \dots, N$) представляют координаты $6N=2n$ -мерного фазового пространства E_{2n} . Кинетическая энергия k -й частицы и всей системы S_N равна

$$K_k = \frac{(p_k)^2}{2m_k} = \frac{m_k}{2} (v_k)^2 = \frac{m_k}{2} \sum_{\alpha=1}^3 (v_k^\alpha)^2, \quad K = \sum_{k=1}^N K_k. \quad (1.28)$$

Элементы объемов физического пространства dV в точке x (обозначаемые иногда dx) и фазового пространства E_{2n} имеют выражения

$$dV \equiv dx = dx^1 dx^2 dx^3, \quad d\Gamma \equiv dp dq = \\ = dp_1^1 dp_1^2 dp_1^3 \dots dp_N^1 dp_N^2 dp_N^3 dq_1^1 dq_1^2 dq_1^3 \dots dq_N^1 dq_N^2 dq_N^3.$$

На том основании, что функция $f_N^0(p, q) = f_N(p, q, t_0)$ определена при $t = t_0$ в некоторой конечной области $\Gamma = \Gamma_0$, причем на границе Γ_0 согласно (1.20) обращается в ноль, иногда ее дополняют до бесконечной области Γ_∞ , непрерывно продолжая $f_N^0(p, q)$ значением ноль в области дополнения.

Поскольку $f_N(p, q, t)$ определяется значением f_N^0 и уравнением Лиувилля (1.21), причем определяется и область Γ , в которой $f_N > 0$ и на границе которой $f_N = 0$, то $\Gamma \subseteq \Gamma_\infty$ может быть дополнена до Γ_∞ со значением $f_N = 0$ вне Γ . Область Γ_∞ определяется условиями

$$\text{для } (p, q) \in \Gamma_\infty: \begin{cases} -\infty < p_m^\alpha < \infty \\ -\infty < q_m^\alpha < \infty \end{cases} \left| \begin{array}{l} \alpha = 1, 2, 3, \\ m = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Средним значением данной функции $\mathcal{F}(p, q)$ при условии, что определенная точка с координатой q_k находится в точке x физического пространства, называется величина (функция \mathcal{F} , t), определяемая (1.25), причем объем $d\Gamma'$ получается из $d\Gamma$, в котором отбрасывается произведение $dq_k \equiv dq_k^1 dq_k^2 dq_k^3$, вместо q_k^α в подынтегральные функции \mathcal{F} , f_N внесены значения x^α , и область Γ' изменения всех импульсов и всех координат, кроме q_k^α , совпадает с областью их изменения в Γ (например, Γ_∞ при всех $m \neq k$).

Такое выражение средней значительно упрощается, если ввести δ -функцию Дирака. Напомним, что если на отрезке $a < \xi < b$ задано множество непрерывных функций (с довольно слабыми ограничениями их свойств), то функцией $\delta(x)$ называется такая, что для любой $\varphi(x)$ из рассматриваемого множества

$$\int_a^b \varphi(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = \varphi(x), \quad (x, \xi) \in [a, b].$$

Отсюда следуют свойства δ -функции:

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \xi \neq x \\ \infty, & \xi = x \end{cases}, \quad \int_a^b \delta(x - \xi) d\xi = 1, \quad \delta(x - \xi) = \delta(\xi - x).$$

Следовательно, интеграл функции двух переменных $\varphi(x, y)$ по y при аргументах, заключенных в интервалах $a < x < b$, $a < y < b$, может быть представлен в виде двойного интеграла

$$\mathcal{J}(x) \equiv \int_a^b \varphi(x, y) dy = \int_a^b \int_a^b \varphi(\xi, y) \delta(x - \xi) d\xi dy.$$

Если обозначить произведение трех δ -функций кратко

$$\delta(q_k - r) \equiv \delta(q_k^1 - x^1) \delta(q_k^2 - x^2) \delta(q_k^3 - x^3), \quad (1.30)$$

то введенное выше среднее значение $\mathcal{F}(p, q)$ при условии, что $q_k = r$, а все другие q_m ($m \neq k$) принимают все значения из области Γ , можно записать в виде интеграла по всей области Γ :

$$\tilde{\mathcal{F}}_k(r, t) \equiv \langle \mathcal{F}(p, q) \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathcal{F}(p, q) f_N(p, q, t) \delta(q_k - r) d\Gamma, \quad (1.31)$$

так как δ -функция (1.30) автоматически преобразует $6N$ -кратный интеграл в $6N-3$ -кратный по всем p и всем q , кроме q_k^a , которые принимают значения x^a .

Равновесный ансамбль. Прежде чем перейти к вычислению средних статистических значений некоторых существенных для МСС функций и выводу некоторых законов, необходимо пояснить возможность *физической трактовки статистического подхода*. Для этого рассмотрим частный случай. Пусть консервативная система S_N (внешние параметры μ постоянны, H представляет полную энергию системы) находится в *равновесном состоянии*, т. е. в неизменном заключающем ее неподвижном объеме V физического пространства макроскопическое состояние является «замороженным», не изменяющимся во времени; равновесное состояние в объеме V *макроскопически однородно*, т. е. одинаково в различных частях объема V . При этом обычно предполагается, что не только общее число частиц N очень велико, но и число частиц каждого сорта $N_1, N_2, \dots, N_\gamma$ (γ — число сортов частиц, $N = N_1 + N_2 + \dots + N_\gamma$) велико. В равновесное состояние при некоторых ограничениях на $U(q, \mu)$ может прийти, например, газ или смесь не реагирующих между собой газов в баллоне с абсолютно неподвижной стенкой («адиабатической оболочкой») или с макроскопически неподвижной стенкой, имеющей постоянную температуру («термостат»).

Консервативная система S_N , для которой $\mathbf{Q} = \mathbf{G} = 0$ находится в *равновесном состоянии (равновесна)*, если в конкретном опыте на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, где t_0 — любой момент (начало отсчета t), среднее значение по времени для любой заданной функции координат q_k и импульсов p_k ($k = 1, 2, \dots, N$)

$$\tilde{\mathcal{F}}_k(p, q) \equiv \mathcal{F}(p_1, \dots, p_N; q_1, \dots, q_N),$$

т. е. величина

$$\tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \mathcal{F}(p(t), q(t)) dt \quad (1.32)$$

не зависит от t_0 и τ при условии, что

$$\tau > \tau_s = \text{const.} \quad (1.33)$$

Наименьшее значение τ_s длины интервала времени, при котором $\tilde{\mathcal{F}}$ остается постоянной, называется *характеристическим временем*

системы S_N . Само среднее значение $\bar{\mathcal{F}}$ называется макроскопическим, или наблюдаемым, значением функции $\mathcal{F}(p, q)$. Если, начиная с любого момента t_0 , в конкретном опыте измерять q, p через минимальные доступные отрезки времени Δt , то за время τ накопится большое число измерений (q^{a1}, p^{a1}) , т. е. найдется множество состояний системы $S_N^{(a1)}$ ($a1=1, 2, \dots; \tau_s/\Delta t \gg 1$). Так как потенциалы U', U^e от времени не зависят, то дальнейшие измерения за пределами интервала дают результаты, почти повторяющие найденные на достаточно большом отрезке времени τ_s . Например, в случае «макроскопически неподвижного» монокристалла при нормальных условиях (давлении, температуре) некоторый меченый атом колеблется около положения равновесия, проходя все возможные значения координат и скоростей за время порядка 10^{-12} — 10^{-13} с, и, значит, τ_s такого же порядка или несколько большего. В случае газов (He, Ar, N₂) при нормальных температуре и давлении каждая молекула имеет около $5 \cdot 10^9$ столкновений в секунду, т. е. τ_s порядка 10^{-9} с.

Поскольку время τ_s мало по сравнению с очень малым макроскопическим временем, которое для кристаллов и газов, например, порядка 10^{-6} — 10^{-3} с, то все найденные выше в опыте состояния системы $S_N^{(a1)}$ ($a1=1, 2, \dots; \tau_s/\Delta t \gg 1$) можно считать допустимыми начальными условиями (1.13) для системы S_N . Получается, что как будто вместо одной системы S_N при $t=t_0$ мы имеем набор систем $S_N^{(a1)}$, отличающихся начальными условиями.

Производя множество конкретных опытов при макроскопически равноправных внешних условиях (например, с газом в термостатах, являющихся баллонами различной формы из разных материалов при одинаковых объемах и температурах с одинаковыми интервалами измерений Δt), получим конечное множество MS_N наборов систем

$$S_N^{(a1)}, S_N^{(a2)}, \dots, S_N^{(ab)}, \dots, S_N^{(aB)} \quad (b=1, 2, \dots, B).$$

Система S_N находится в макроскопически равновесном состоянии (*макроскопически равновесна*), если в любом конкретном опыте она равновесна и имеет во всех опытах одинаковые $\tau_s, \bar{\mathcal{F}}$ с некоторой макроскопически определенной степенью точности.

Множество MS_N равновесных состояний системы S_N , состоящее из всех $R=AB$ состояний (элементов) $S_N^{(ab)}$ ($a=1, 2, \dots, A; b=1, 2, \dots, B$) при фиксированных внешних макроскопических условиях, называется равновесным ансамблем системы S_N .

Число элементов MS_N теоретически можно считать как угодно большим (при $\Delta t \rightarrow 0, B \rightarrow \infty$), и элементы можно перенумеровать по индексам a, b так, чтобы близким значениям пар чисел (a, b) соответствовали близкие по значению (p, q) элементы $S_N^{(ab)}$.

Обозначая через $(q_k, q_k^1), (p_k, p_k^1)$ произвольные фиксированные значения координат и импульсов, предполагая конечные разности

$$dp_k = p_k^1 - p_k, \quad dq_k = q_k^1 - q_k$$

сколь угодно малыми, фазовым объемом в точке (p, q) назовем величину

$$\begin{aligned} dpdq &= dp_1 \dots dp_N dq_1 \dots dq_N \equiv \\ &\equiv dp_1^1 dp_1^2 dp_1^3 \dots dp_N^1 dp_N^2 dp_N^3 dq_1^1 dq_1^2 dq_1^3 \dots \\ &\dots dq_N^1 dq_N^2 dq_N^3. \end{aligned}$$

Число $R=AB$ систем ансамбля предполагается столь большим, что в фазовом объеме $dpdq$ в момент t заключено также большое число систем.

Системы $S_N^{(ab)}$ при различных a, b неравновероятны. Например, атом в кристалле чаще всего можно наблюдать около положения равновесия, молекулу газа почти невозможно наблюдать в момент столкновения с другой молекулой и т. д.

Обозначим через R_1 плотность числа систем ансамбля в состоянии с координатами $(p_1, p_2, \dots, p_N; q_1, q_2, \dots, q_N) \equiv (p, q)$, так что $R_1(p, q)dpdq$ представляет число систем, импульсы и координаты которых находятся в объеме $dpdq$, включающем точку (p, q) .

Плотностью вероятности нахождения системы S_N в состоянии с данными значениями $(p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N)$, т. е. в точке (p, q) , назовем предел отношения

$$f(p, q) = \left[\frac{1}{R} R_1(p, q) \right]_{R \rightarrow \infty}. \quad (1.34)$$

Для любой данной $\mathcal{F}(p, q)$ естественно назвать средней по ансамблю величину

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \mathcal{F}(p, q) f(p, q) dpdq, \quad (1.35)$$

если $f(p, q)$ нормировать условием

$$\int_{\Gamma_{AB}} f(p, q) dpdq = 1$$

и макроскопически неподвижную область Γ_{AB} определить по свойствам самой системы S_N , т. е. по параметрам μ функции Гамильтона $H(p, q, \mu)$ и заданным макроскопическим внешним условиям. Уравнение нормировки непосредственно следует из (1.34) до перехода к пределу $R \rightarrow \infty$ и означает, что число систем ансамбля R равно AB . Выражение средней по ансамблю означает, что в нем функция $\mathcal{F}(p, q)$ встречается столько же раз, сколько и аргументы этой функции. Например, кинетическая энергия пятой частицы $[(p_5^1)^2 + (p_5^2)^2 + (p_5^3)^2]/2m_5$ встречается в ансамбле столько раз, сколько тройки чисел (p_5^1, p_5^2, p_5^3) .

Средние по времени и по ансамблю для макроскопически равновесной системы S_N построены на одном и том же множестве $R=AB$ элементов $S_N^{(ab)}$ ($a=1, 2, \dots, A$; $b=1, 2, \dots, B$), и создается впечатление, что переход от средней по времени к средней по ансамблю есть чисто формальное преобразование, т. е. они равны между собой. Это было бы действительно так, если бы конкретные опыты приводили к тождественным результатам и в каждом из них за время τ система совершала в фазовом пространстве один и тот же замкнутый цикл, т. е. множество MS_N сводилось бы к множеству состояний в одном детерминированном движении S_N при точно заданных начальных условиях. Поскольку в этом случае (p, q) однозначно определяются интегралами движения, то и $f(p, q)$ определялась бы ими, т. е. удовлетворяла бы уравнению Лиувилля. Следовательно, средняя по времени равнялась бы статистической средней. Это впечатление ошибочно, так как все перечисленные условия не выполняются. На макроскопически равновесную систему наложены лишь очень слабые ограничения, и имеется множество «допусков». (Для газа — допуски на температуру и объем баллона; независимость $\tilde{\mathcal{F}}$ от вещества баллона и состояния его поверхности; независимость от малых ошибок в параметрах μ и т. д.). В общем случае не существует и замкнутых циклов у детерминированных систем.

Все равновесные состояния консервативной системы S_N определены в неподвижной области Γ фазового пространства (p, q) , следовательно, и в неподвижном объеме V физического пространства, т. е. макроскопически система S_N представляется неподвижной. Поэтому интегралы движения $Q=0$, $G=0$ являются тривиальными, и известен только один интеграл движения, явно не зависящий от времени, — интеграл энергии *

$$H(p, q) = K(p) + U(q, \mu) = E = \text{const},$$

$$K = \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2m_k} (p_k^\alpha)^2. \quad (1.36)$$

Предположение, что в построенном выше ансамбле $f=f_N$ и функция $f_N(p, q)$ зависит только от $H(p, q)$, определяет так называемый канонический ансамбль Гиббса

$$f_N(p, q) = f_N(H(p, q, \mu)) = f_N(H). \quad (1.37)$$

В каноническом ансамбле константа E имеет различные значения для разных систем ансамбля, т. е. функция $f_N(H)$ опреде-

* Вопрос о том, является ли при данной $H(p, q)$ интеграл (1.36) единственным, явно не зависящим от t , не решен. Есть работы, в которых предполагается существование других.

лена в $6N$ -мерной связной области Γ фазового пространства и $H=E$ являются ее поверхностями уровня.

Принимаемое для равновесных систем предположение, что статистическое среднее значение любой $\mathcal{F}(p, q)$, называемое также *средним по ансамблю*,

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle = \int_{\Gamma} \mathcal{F}(p, q) f_N(H) dp dq \quad (1.38)$$

равно среднему по времени (1.32)

$$\langle \mathcal{F}(p, q) \rangle = \tilde{\mathcal{F}}, \quad (1.39)$$

называется *эргодической гипотезой*, или, иногда, *эргодической теоремой*, доказанной, однако, только для некоторых частных случаев. Эргодическая гипотеза во многих случаях дает основание для трактовки введенных выше статистических средних как наблюдаемых макроскопических параметров системы. Например, если N (а также числа сортов N_1, \dots, N_r) очень велико и система S_N из состояния (1.23) переходит в равновесное с функцией распределения (1.37), то эволюция описывается функцией, определяемой уравнением (1.21), причем некоторые из статистических средних типа (1.31) представляют макроскопические наблюдаемые характеристики системы.

Плотность массы, скорость движения и закон сохранения массы простой системы. Общий статистический подход к описанию движения системы при некоторых существенных дополнительных определениях и условиях в принципе позволяет получить из уравнения Лиувилля важные для МСС законы неравновесного и неоднородного в пространстве движения системы S_N как сплошной среды. Среди них наименее ограничительным является вывод закона сохранения массы, который и приводится ниже для простой системы.

Вероятность нахождения определенной частицы с номером $k=l$, например первой ($l=1$), в единице объема с центром \mathbf{r} , точнее — *плотность вероятности нахождения частицы $k=l$ в точке \mathbf{r} в момент t* при условии, что импульсы всех частиц и координаты всех остальных (кроме $k=l$) частиц имеют какие угодно значения из области $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$, пропорциональна $6N-3$ -кратному интегралу от $f(t, p, q)$ по всем импульсам в пределах области Γ_p и по координатам в пределах области Γ_q всех частиц, кроме $k=l$, для которой $\mathbf{q}_l = \mathbf{r}$ зафиксировано.

Средним числом частиц системы S_N , находящихся в момент t в единице объема V в точке \mathbf{r} пространства наблюдателя, называется величина $v(t, \mathbf{r})$, определяемая равенством

$$v = \sum_{k=1}^N \langle \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle, \quad (1.40')$$

т. е. математическое ожидание всех точек системы в единице объема; причем интеграл от $v(\mathbf{r}, t)$ по всему объему V , занимаемому системой S_N , равен числу N частиц системы:

$$\int_V v(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^N \int_V \langle \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r} = N,$$

$$d\mathbf{r} \equiv dV = dx^1 dx^2 dx^3.$$

Макроскопической плотностью называется величина

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \left\langle \sum_{k=1}^N m_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle. \quad (1.40)$$

В случае одинаковых масс всех частиц $\rho = m v$.

Макроскопическая скорость соответственно определяется через импульсы равенством

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \left\langle \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle. \quad (1.41)$$

Уравнение Лиувилля (1.21) запишем в виде

$$\dot{f}_N \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) + \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N) \right] = 0, \quad (1.42)$$

где $v_k^\alpha = p_k^\alpha / m_k$ и $F_k^\alpha = -\partial H / \partial q_k^\alpha$ (F_k^α не зависит от p). Умножим (1.42) на $m_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})$, $l = 1, 2, \dots, N$, и просуммируем по l от 1 до N ; результат интегрируем по области Γ , т. е. вычисляем равную нулю сумму

$$\sum_{l=1}^N m_l \int_{\Gamma} \dot{f}_N(p, q, t) \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) dp dq = 0. \quad (1.43)$$

Очевидно, на основании определения (1.40)

$$\sum_{l=1}^N m_l \int_{\Gamma} \frac{\partial f_N}{\partial t} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) dp dq = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{l=1}^N m_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \right\rangle = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Поскольку для любых l и k согласно (1.20)

$$\int_{\Gamma_p} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N) dp = \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N) dp = 0$$

(так как импульс p_k^α принимает значение на границе области Γ_p), соответствующая сумма в (1.43) исчезнет; что касается слагае-

мых, содержащих вторые члены суммы в (1.42), они содержат выражения типа

$$\int_{\Gamma_q} \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) dq.$$

Для $l \neq k$ функция $\delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})$ выйдет из-под интеграла по q_k^α , интеграл возьмется и будет равен нулю, так как координата q_k^α выйдет на границу области Γ_q ; следовательно, останется сумма, которая на основании определения ρ и $V(\mathbf{r}, t)$ (1.40), (1.41) равна (при $l = k$)

$$\int_{\Gamma} \sum_{k=1}^N \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (\rho_k^\alpha f_N) dp dq = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho V^\alpha),$$

где x^α , V^α — компоненты \mathbf{r} , \mathbf{V} . Таким образом, из (1.43) получается закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho V^\alpha) = 0, \quad (1.44)$$

который из других соображений получается в МСС.

Уравнение сохранения импульса для массы единичного объема получается из (1.42) умножением на $\mathbf{r}_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r})$, суммированием по всем l от 1 до N и интегрированием по Γ , т. е. из векторного уравнения

$$\int_{\Gamma} \left\{ \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_N}{\partial t} \mathbf{r}_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left[\mathbf{r}_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{r}_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} (F_k^\alpha f_N) \right] \right\} dp dq = 0. \quad (1.45)$$

При интегрировании по области Γ время t является параметром, от которого (через параметры μ) может зависеть граница области Γ ; на ней согласно (1.20) функция $f_N = 0$ и для всякой $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

$$\int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial f_N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} dp dq = \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rangle.$$

Поэтому первая сумма равна (с учетом (1.41))

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{l=1}^N \mathbf{r}_l \delta(\mathbf{q}_l - \mathbf{r}) \right\rangle = \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t}. \quad (1.45')$$

Вторая сумма при $l \neq k$ обращается в ноль, так как производная по таким q_k^α выходит за знак подынтегрального выражения

$$p_l \delta(q_l - r) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) = \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} [p_l v_k^\alpha f_N \delta(q_l - r)]$$

и интеграл по Γ равен нулю (q_k^α принимают значения на границе Γ , и потому $f_N = 0$). Значит, вторая сумма равна

$$\sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^N p_k \delta(q_k - r) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) dp dq.$$

Но по определению $\delta(q_k - r)$ (1.30)

$$\frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} \delta(q_k - r) = - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(q_k - r)$$

и вследствие независимости p_k , $v_k^\alpha = p_k^\alpha / m_k$, $f_N(p, q, t)$ от r

$$\begin{aligned} p_k \delta(q_k - r) \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} (v_k^\alpha f_N) &= \frac{\partial}{\partial q_k^\alpha} [p_k \delta(q_k - r) v_k^\alpha f_N] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [p_k \delta(q_k - r) v_k^\alpha f_N]. \end{aligned}$$

Интеграл от первого выражения по Γ равен нулю, так как $f_N = 0$ на границе Γ ; производная по x^α при подсчете суммы выходит за знак интеграла по Γ . Следовательно, вторая сумма в (1.45) равна

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle p_k v_k^\alpha \delta(q_k - r) \rangle. \quad (1.45'')$$

Среднее значение всех скоростей v_k^α ($k=1, 2, \dots, N$) примем равным V^α , среднее значение импульсов p_k — равным $m_k V$ и обозначим отклонения от средних

$$\Delta p_k = p_k - m_k V. \quad (1.46)$$

Тогда для (1.45'') с учетом (1.40), (1.41) получим выражение

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho V^\alpha V) + \frac{\partial \sigma_{\text{кин}}^\alpha}{\partial x^\alpha} \right], \quad (1.47)$$

где вектор

$$\sigma_{\text{кин}}^{\alpha} = \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\Delta p_k^{\alpha} \Delta p_k}{m_k} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle \quad (1.48)$$

называется *кинетическим вектором внутренних напряжений* на единичной площадке с нормалью, совпадающей с осью x^{α} в точке \mathbf{r} . Три вектора $\sigma_{\text{кин}}^{\alpha}$ ($\alpha=1, 2, 3$) образуют симметричный тензор кинетических напряжений ($\alpha, \beta=1, 2, 3$)

$$\sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta} = \sigma_{\text{кин}}^{\beta\alpha} = \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\Delta p_k^{\alpha} \Delta p_k^{\beta}}{m_k} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle. \quad (1.48')$$

В последней (третьей) сумме уравнения (1.45), слагаемые при $l \neq k$ обращаются в ноль (интегрируются по p_k^{α}) и при $l=k$ на основании тождества

$$F_k^{\alpha} p_k \frac{\partial f_N}{\partial p_k^{\alpha}} = F_k^{\alpha} \frac{\partial}{\partial p_k^{\alpha}} (p_k f_N) - F_k^{\alpha} f_N \frac{\partial p_k}{\partial p_k^{\alpha}}$$

и независимости вектора силы \mathbf{F}_k от импульсов \mathbf{p} получим

$$-\sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \left\langle F_k^{\alpha} \frac{\partial p_k}{\partial p_k^{\alpha}} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle = -\mathbf{F}(\mathbf{r}, t).$$

Здесь $\partial p_k / \partial p_k^{\alpha} = \partial \mathbf{q}_k / \partial q_k^{\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha}$ — единичный вектор вдоль оси x^{α} .

Вектор

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k(\mathbf{q}, t) \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \rangle \quad (1.49)$$

представляет некоторую среднюю силу, действующую на единицу объема среды в точке \mathbf{r} и возникающую за счет потенциала взаимодействия всех точек системы S_N между собой и с внешними телами;

$$-F_k^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial q_k^{\alpha}} = \frac{\partial U'(q)}{\partial q_k^{\alpha}} + \frac{\partial U^e(q, \mu)}{\partial q_k^{\alpha}} \equiv -F_k'^{\alpha} - F_k^{\epsilon\alpha}, \quad (1.49')$$

где первое слагаемое дает силу, действующую на k -частицу со стороны всех других частиц системы, второе — силу со стороны внешних тел.

В результате уравнение сохранения импульса (1.45) приводится к виду

$$\rho \frac{dV}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\text{кин}}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \mathbf{F}'(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}^e(\mathbf{r}, t), \quad (1.50)$$

$$\frac{dV}{dt} \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 V^{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x^{\alpha}},$$

где $\mathbf{F}^e(\mathbf{r}, t)$ — главный вектор внешних сил, приходящихся на единицу объема в точке \mathbf{r} в момент t .

В МСС предполагается, что вектор $\mathbf{F}'(\mathbf{r}, t)$ всегда приводится к дивергентному виду, т. е.

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}, t) \equiv - \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{e}_{\alpha} \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\partial U'(q)}{\partial q_k^{\alpha}} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) \right\rangle = - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\text{пот}}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (1.51)$$

В некоторых случаях в статистической механике такое приведение хотя бы формально удается сделать. Пусть, например, потенциал взаимодействия частиц системы между собой $U'(q)$ представляет собой сумму потенциалов U_{mn} парного взаимодействия частиц m и n , зависящих от расстояния между ними:

$$U'(q) = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^N U_{mn}(\rho_{mn}), \quad \rho_{mn}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (q_m^{\alpha} - q_n^{\alpha})^2, \quad (1.52)$$

где сумма берется по всем m, n от 1 до N , причем $U_{mm} \equiv 0$. Входящая в (1.51) сумма легко преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial U'}{\partial q_k^{\alpha}} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r}) = \sum_{m,k=1}^N \frac{\partial U_{mk}}{\partial q_k^{\alpha}} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})$$

и затем на основании тождества ($U_{mk} = U_{km}$)

$$\frac{\partial U_{mk}}{\partial q_k^{\alpha}} = - \frac{\partial U_{km}}{\partial q_m^{\alpha}}$$

— к виду

$$\sum_{k=2}^N \sum_{m=1}^{k-1} \frac{\partial U_{km}}{\partial q_m^{\alpha}} [\delta(\mathbf{q}_m - \mathbf{r}) - \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{r})]. \quad (1.53)$$

Если силы парного взаимодействия частиц k и m — близкодействующие, т. е. пренебрежимы при удалении частиц на расстояние порядка a , весьма малое сравнительно с характерным линейным размером объема V , а значит, и сравнительно с r , то аргументы δ -функции, входящие в (1.53), будут отличаться на

величину порядка a . Поэтому их разность формально можно заменить разложением в ряд по степеням $q_m - q_k$:

$$\begin{aligned} \delta(q_m - r) - \delta(q_k - r) &= \delta(q_k - r + q_m - q_k) - \delta(q_k - r) = \\ &= \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \delta(q_k - r)}{\partial x^\beta} (q_k^\beta - q_m^\beta) + \dots \end{aligned}$$

Если ограничиться только первым (выписанным выше) членом разложения, то подстановка его в (1.53) и в (1.51) приводит F' к дивергентному виду, причем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{пот}}^\alpha &= - \sum_{k=2}^N \sum_{m=1}^{k-1} \langle F_{km} (q_k^\alpha - q_m^\alpha) \delta(q_k - r) \rangle, \\ -F_{km} &= \frac{\partial U_{km}}{\partial q_k} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial U_{km}}{\partial q_k^\beta} e_\beta. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Если использовать полный ряд, то сумма в (1.51) также приведет к дивергентному виду и выражение (1.54) будет первым членом разложения вектора напряжения $\sigma_{\text{пот}}^\alpha$. Строгое доказательство такой возможности здесь не рассматривается.

Представим *полный вектор напряжения* через его компоненты $\sigma^{\alpha\beta}$:

$$\sigma^\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \sigma^{\alpha\beta} e_\beta = \sum_{\beta=1}^3 (\sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta} + \sigma_{\text{пот}}^{\alpha\beta}) e_\beta. \quad (1.55)$$

Три скалярных уравнения сохранения импульса из (1.50) получим в виде

$$\rho \left(\frac{\partial V^\beta}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 V^\alpha \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} + F_\beta^\epsilon \quad (\beta=1, 2, 3), \quad (1.56)$$

причем в рассматриваемом частном случае компоненты *тензора внутренних напряжений* $\sigma^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2, 3$) определяются формулами

$$\begin{aligned} -\sigma^{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^N \left\langle \frac{\Delta p_k^\alpha \Delta p_k^\beta}{m_k} \delta(q_k - r) \right\rangle + \\ &+ \sum_{k=2}^N \sum_{m=1}^{k-1} \left\langle \frac{(q_k^\alpha - q_m^\alpha)(q_k^\beta - q_m^\beta)}{\rho_{km}} \frac{dU_{km}}{d\rho_{km}} \delta(q_k - r) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.57)$$

и, как видно, тензор напряжений симметричен: $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$.

Приведение F' к дивергентному виду будет аналогичным и в более общем случае, когда потенциал U' зависит от разностей координат $q_m^a - q_k^a$.

Термодинамические параметры и функции системы S_N как сплошной среды не могут быть введены так же просто, как ρ , v , V , σ^{ab} , если не наложить более сильных ограничений, позволяющих обобщить определения соответствующих параметров и функций в равновесных состояниях (§ 2).

В МСС чаще всего рассматривается такое неоднородное (по \mathbf{r} , t) движение статистической системы S_N в физическом пространстве, когда градиенты всех средних (типа ρ , V , σ^{ab}) по \mathbf{r} и t почти всюду имеют порядок отношения их характерных значений к характерному линейному размеру области и интервалу времени монотонности. В таком случае при очень большом N (также N_1 , N_2 , ...) в окрестности точки \mathbf{r} в объеме $dV = dx^1 dx^2 dx^3$, малом сравнительно с V и настолько большим, что в нем заключена подсистема $S_{\Delta N}$ с очень большим числом частиц ΔN (ΔN_1 , ΔN_2 , ...), движение статистической системы $S_{\Delta N}$ будет почти однородным. Если $U'(q)$ — потенциал *близкодействия*, т. е. частицы системы S_N взаимодействуют только на расстояниях порядка размера частиц a , и если $|dx^i| \gg a$, то систему $S_{\Delta N}$ можно рассматривать как замкнутую статистическую систему, свойства которой совпадают со свойствами S_N в макроскопически однородном состоянии. Отсюда возникают различные возможности дальнейшего эффективного изучения динамики статистических систем, поскольку прямая задача построения функции $f_N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ при очень больших N (N_1 , N_2 , ...) представляется сложной. Отметим две из таких возможностей.

Метод квазиравновесных и близких движений по существу сводится к использованию свойств равновесных систем (§ 2) и отысканию функции $f_N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, достаточно близкой к функции канонического ансамбля Гиббса.

Метод кинетических уравнений относится к существенно неравновесному движению статистической системы S_N , в первую очередь макроскопически однородному в объеме $V \rightarrow \infty$ физического пространства. Для простоты рассмотрим систему S_N , состоящую из $N \rightarrow \infty$ частиц одного сорта плотности $N/V = v = \text{const}$ с совершенно одинаковыми потенциалами парного взаимодействия $U_{km} = U(\rho_{km})$, т. е. систему неразличимых частиц, каждая из которых может занимать любое положение внутри объема. Физически такая система S_N является *классическим приближением одноатомного нейтрального газа*. Функция распределения $f_N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ будет симметричной, т. е. не будет изменяться от перестановки пар $(\mathbf{q}_l, \mathbf{p}_l)$ и $(\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_k)$ для любых $k, l = 1, 2, \dots, N$. Область Γ изменения импульсов и координат всех точек системы бесконечна и состоит из объединения бесконечного числа одинаковых для лю-

бого k шестимерных пространств $\Omega_k = \Omega$ векторов (p_k, q_k) с областью изменения координат

$$\Omega: -\infty < (q_k^\alpha, p_k^\alpha) < \infty, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (1.58)$$

Границу области V для каждой точки q_k системы можно заменить отталкивающим потенциалом $U_V(q_k, t)$, обращаемся в ноль внутри V и в бесконечность — на границе V . Функция Гамильтона равна

$$H_N = \sum_{k=1}^N H_{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N U(p_{kl}), \quad H_{(k)} = \frac{(p_k)^2}{2m} + U_V(q_k, t). \quad (1.59)$$

Функция распределения $f_1(p, q)$ одной частицы (безразлично какой, например первой) определяется как условная средняя, если $q_1 = Q_1$, $p_1 = P_1$ фиксированы:

$$\begin{aligned} f_1(P_1, Q_1, t) &= W^1 \int_{\Gamma} f_N(p, q, t) \delta(p_1 - P_1) \delta(q_1 - Q_1) dp dq = \\ &= W^1 \int_{\Omega} dp_2 dq_2 \dots \int_{\Omega} f_N(P_1, Q_1; p_2, q_2; \dots; p_N, q_N; t) dp_N dq_N, \end{aligned} \quad (1.60)$$

причем, согласно (1.19)

$$\frac{1}{W^1} \int_{\Omega} f_1(P_1, Q_1, t) dP_1 dQ_1 = 1, \quad (1.61)$$

где Ω — область (1.58). Следовательно, $f_1(P_1, Q_1, t)/W^1$ — плотность вероятности нахождения параметров частицы в точке P_1, Q_1 в момент t .

Двухчастичная функция распределения $f_2(P_1, Q_1; P_2, Q_2; t)$, называемая корреляционной функцией распределения пар частиц, получается при замене W^1 на W^2 и умножении подынтегрального выражения в (1.60) на $\delta(p_2 - P_2) \delta(q_2 - Q_2)$, причем

$$\frac{1}{W^2} \int_{\Omega} dP_1 dQ_1 \int_{\Omega} f_2 dP_2 dQ_2 = 1.$$

Вообще s — частичная функция распределения f_s — получается как условное среднее значение $f_N(p, q, t)$, когда параметры p_k, q_k ($k = 1, 2, \dots, s$) s частиц имеют фиксированные значения P_k, Q_k :

$$\begin{aligned} f_s(P, Q, t) &= W^s \int_{\Gamma} f_N(p, q, t) \delta(p_1 - P_1) \delta(q_1 - Q_1) \dots \\ &\dots \delta(p_s - P_s) \delta(q_s - Q_s) dp dq. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Нормирующий множитель W^s удовлетворяет условию

$$\frac{1}{W^s} \int_{\Omega} dP_1 dQ_1 \dots \int_{\Omega} f_s(P, Q, t) dP_s dQ_s = 1. \quad (1.63)$$

Кинетические уравнения для различных f_s получаются из уравнения Лиувилля (1.21), где H_N определено (1.59). Умножая (1.21) на

$$W^s dp_{s+1} dq_{s+1} \dots dp_N dq_N$$

и интегрируя по всем значениям этих переменных при условии, что $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $V/N \rightarrow v$, т. е. по бесконечной области Γ_{∞} или (1.58) с учетом свойства потенциала $U_v(q_k, t)$, получим после некоторых преобразований

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = [H_s; f_s] + \frac{1}{v} \int_{\Omega} [U_{s+1}; f_{s+1}] dp_{s+1} dq_{s+1}. \quad (1.64)$$

Здесь H_s и U_{s+1} имеют выражения

$$H_s = \sum_{k=1}^s \frac{(p_k)^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s U(p_{kl}), \quad (1.65)$$

$$U_{s+1} = \sum_{k=1}^s U(p_{k,s+1}),$$

и скобки Пуассона для любых двух функций Z_k, f_k от $2k$ векторов p_l, q_l ($l=1, 2, \dots, k$) в соответствии с (1.22) имеют выражение

$$[Z_k; f_k] = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{l=1}^k \left(\frac{\partial Z_k}{\partial q_l^{\alpha}} \frac{\partial f_k}{\partial p_l^{\alpha}} - \frac{\partial Z_k}{\partial p_l^{\alpha}} \frac{\partial f_k}{\partial q_l^{\alpha}} \right), \quad (1.66)$$

так что $[H_s; f_s]$ получается отсюда при $k=s$, $Z_s = H_s$ и $[U_{s+1}; f_{s+1}]$ — при $k=s+1$, $Z_{s+1} = U_{s+1}$.

Вместо задачи решения уравнения Лиувилля (1.21) для системы очень большого числа частиц N , т. е. для отыскания функции очень большого числа $6N+1$ переменных $(p_k^{\alpha}, q_k^{\alpha}, t; k=1, 2, \dots, N; \alpha=1, 2, 3)$, мы получили задачу решения бесконечной системы зацепляющихся кинетических уравнений (1.64) при $s=1, 2, \dots, \infty$, причем уравнение для $f_1(p_1, q_1, t)$, зависящей от семи переменных, содержит под интегралом по Ω функцию f_2 ; уравнение для $f_2(p_1, q_1; p_2, q_2, t)$, зависящей от тринадцати переменных, содержит, аналогично предыдущему, f_3 и т. д. Кажущееся усложнение задачи (замена одного уравнения для f_N бесконечным числом совместных уравнений для бесконечного числа

функций f_s) значительно ее упрощает, так как позволяет обрывать цепочку уравнений на малых значениях s (обычно $s=1$, иногда $s=1, 2$) или даже получать важные статистические физические свойства из незамкнутых уравнений. Первое (обрыв цепочки при малых s) возможно вследствие близкодействия потенциала $U(\rho_{kl})$: макроскопические свойства системы в окрестности точки \mathbf{r} могут зависеть от взаимодействия лишь ближайших частиц. Второе (получение свойств из незамкнутой системы) целесообразно потому, что наличие второго слагаемого в правой части (1.64) приводит к возможности введения новых макроскопических параметров, которые могут обнаруживаться в макроопытах.

Выпишем подробно уравнение (1.64) для $s=1$. Из (1.65) имеем

$$H_1 = \frac{(\mathbf{p}_1)^2}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^3 (p_1^\alpha)^2; \quad U_2 = U(\rho_{12}), \quad \rho_{12}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (q_1^\alpha - q_2^\alpha)^2$$

и потому находим скобки Пуассона

$$[H_1; f_1] = -\frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^3 p_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha} = -\sum_{\alpha=1}^3 v_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha},$$

$$[U_2; f_2] = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial U(\rho_{12})}{\partial q_1^\alpha} \left(\frac{\partial f_2}{\partial p_1^\alpha} - \frac{\partial f_2}{\partial p_2^\alpha} \right).$$

Учитывая, что второе слагаемое $[U_2; f_2]$ при интегрировании по Ω в (1.64) исчезает, искомое уравнение для одночастичной функции распределения $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$ примет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ -v_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha} + \frac{1}{v} \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial p_1^\alpha} d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2 \right\}, \quad (1.67)$$

причем сюда входит шестикратный интеграл по области (1.58) при $k=2$.

Формулой (1.61) введена нормировка $W^1(t)$ функции f_1 , равная ее среднему значению по области Ω :

$$W^1(t) = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1.$$

Умножая (1.67) на $d\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1$, интегрируя по Ω и учитывая в дальнейшем, что на границе области Ω имеем $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t) = 0$, $(p_1^\alpha)^v f_1(\mathbf{p}_1,$

$q_1, t) = 0$; $(q_1^\alpha)^\gamma f_1(p_1, q_1, t) = 0$ при любом конечном числе γ , получим

$$\frac{\partial W^1}{\partial t} = 0, \text{ т. е. } W^1 = \text{const.}$$

Ранее формулами (1.40) и (1.40') были определены плотность $\rho(r, t) = m\nu$ и число частиц $\nu(r, t)$ в единице объема физического пространства в точке r . Легко видеть, что ν и ρ могут быть выражены также формулами

$$\nu = \frac{1}{W^1} \int_{\Omega_p} f_1(p_1, r, t) dp_1, \quad \rho = m\nu, \quad \Omega_p \in \Omega.$$

Формулой (1.41) был введен вектор скорости среды $V(r, t)$, который через функцию f_1 определяется выражением

$$\rho V = \frac{1}{W^1} \int_{\Omega_p} p_1 f_1(p_1, r, t) dp_1.$$

Умножая (1.67) на $m dp_1 / W^1$ и интегрируя по Ω_p , получим сразу закон сохранения массы (1.44), так как интегральный член в (1.67) будет интегрироваться еще по p_1^α и исчезнет. Уравнения сохранения импульса (1.56) также получаются умножением на $p_1^\beta dp_1 / W^1$ и интегрированием по Ω_p . Для $\sigma_{\text{кн}}^{\alpha\beta}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{кн}}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{W^1} \int_{\Omega_p} \frac{\Delta p_1^\alpha \Delta p_1^\beta}{m} f_1(p, r, t) dp_1 = \\ &= \frac{2}{v} \int_{\Omega_p} \frac{\Delta p_1^\alpha \Delta p_1^\beta}{2m} f_1 dp_1 / \int_{\Omega_p} f_1 dp_1, \quad v = \frac{m}{\rho}. \end{aligned}$$

Для производной от $\sigma_{\text{пот}}^{\alpha\beta}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\text{пот}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} &= \frac{1}{v W^1} \int_{\Omega_p} p_1^\beta dp_1 \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial p_1^\alpha} dp_2 dq_2 = \\ &= \frac{1}{v W^1} \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial q_1^\alpha} dp_2 dq_2 \int_{\Omega_p} \left[\frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} (p_1^\beta f_2) - \delta^{\alpha\beta} f_2 \right] dp_1 = \\ &= - \frac{\delta^{\alpha\beta}}{v W^1} \int_{\Omega} \frac{\partial U(|r - q_2|)}{\partial x^\alpha} f_2(p_1, r; p_2, q_2; t) dp_1 dp_2 dq_2. \end{aligned}$$

Полагая для газа $\sigma_{\text{пот}}^{\alpha\beta} = p_U(\mathbf{r}, t) \delta^{\alpha\beta}$, следовательно,

$$\frac{\partial p_U}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{vW^1} \int_{\Omega} \frac{\partial U(|\mathbf{r} - \mathbf{q}_2|)}{\partial x^\alpha} f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}; \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2; t) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2,$$

уравнения сохранения импульсов получим в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 v^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \right) = -\frac{\partial p_U}{\partial x^\beta} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha}.$$

Вектор $\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1 - m\mathbf{V}$ представляет хаотическое движение частиц системы. Если температуру в точке \mathbf{r} определить с точностью до множителя как среднее по всем скоростям значение кинетической энергии хаотического движения, т. е.

$$\int_{\Omega_p} \frac{(\Delta \mathbf{p}_1)^2}{2m} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}_1 / \int_{\Omega_p} f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{p}_1 = \frac{3}{2} kT(\mathbf{r}, t),$$

причем T будет выражено в кельвинах, k — постоянная Больцмана, и если *среднее кинетическое давление* определить как арифметическое среднее значение диагональных компонент тензора $\sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta}$, т. е.

$$p_{\text{кин}} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta},$$

то, составляя такую сумму, получим $p_{\text{кин}}v = kT$. Полным давлением называется сумма $p = p_{\text{кин}} + p_U$. Таким образом, получаем уравнение состояния

$$pv = kT + vp_U,$$

где $v = m/\rho$ — удельный объем системы в точке (\mathbf{r}, t) .

Статистическую теорию рассматриваемой системы (одноатомного газа) можно продолжить и вывести другие соотношения. Существенно отметить, что понятия плотности ρ , средней скорости \mathbf{V} , кинетических составляющих тензора внутренних напряжений $\sigma_{\text{кин}}^{\alpha\beta}$ и кинетической составляющей давления $p_{\text{кин}}$, температуры T , кинетической энергии (среднее значение $(p_1)^2/2m$) связаны только с одночастичной функцией распределения $f_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, t)$, тогда как потенциальная составляющая давления p_U , потенциальная энергия, выражающаяся, очевидно, через интеграл

$$\frac{1}{W^2} \int U(\mathbf{q}_2 - \mathbf{r}) f_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}, \mathbf{q}_2, t) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{q}_2,$$

связаны уже с двухчастичной (бинарной) функцией распределения f_2 . Поэтому получение закона сохранения энергии потребует

использования кинетического уравнения для f_2 , содержащего f_3 . Замыкание системы основных вводимых средних величин (ρ , V , T , $\sigma^{\alpha\beta}$, ...) и определяющих их уравнений в МСС производится исходя из макроскопических опытов, а в статистической механике — на основании конкретизации свойств системы S_N и некоторых гипотез. Предположение, что функция распределения f_s с наибольшим индексом s является некоторым функционалом функций с меньшими индексами (f_{s-1}, \dots, f_1), очевидно, замыкает систему кинетических уравнений. Предположение, что плотность газа мала, вводит малый параметр $1/v$. Это означает, что для замыкания может быть использован также один из методов малого параметра.

Не останавливаясь более подробно на статистической теории газа, отметим, что аппарат кинетических уравнений развит также для более сложных систем S_N , состоящих из частиц разного сорта и переменного состава.

§ 2. ТЕРМОДИНАМИКА ЗАМКНУТЫХ РАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

Состояние системы S_N равновесно, если: 1) она консервативна, т. е. потенциал $U(q, \mu)$ всех внешних и внутренних сил явно не зависит от времени; 2) среднее переносное движение ее отсутствует (граница объема V неподвижна, количество движения и момент количества движения S_N равны нулю); 3) функция распределения $f(p, q, \mu)$ явно не зависит от времени. При этих условиях функция Гамильтона

$$H(p, q, \mu) = K(p, q) + U(q, \mu) = E, \quad (2.1)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \bar{k}_{ij}(q) p_i p_j,$$

является энергией системы, причем она постоянна для каждой системы $S_N^{(\alpha)}$ ансамбля (может быть различна для различных α). Следовательно, функция

$$f(p, q) = f(H, \theta), \quad (2.2)$$

где θ — некоторый набор не зависящих от p, q параметров, является решением уравнения Лиувилля. Именно эта функция лежит в основе термодинамики замкнутых равновесных систем.

Условие нормировки функции f записывается в виде

$$\int_{\Gamma} f(H(p, q, \mu), \theta) dp dq = 1, \quad (2.3)$$

причем существенно, что на границе области Γ функция f обращается в нуль.

Возникает вопрос: реализуются ли указанные выше условия равновесности S_N в физических средах, так как они движутся, вообще говоря, неравномерно во времени и неоднородно в пространстве? Но если рассмотреть макроскопически очень малый движущийся объем, включающий, однако, большое число одинаковых частиц, и проследить за такой системой в течение макроскопически очень малого, но превосходящего τ_s времени, то в соответствующей подвижной системе координат система приближенно удовлетворяет условию 2, так как силы инерции переносного движения (обычно) малы по сравнению с силами взаимодействия частиц. По свойству физических тел условие 1 не является ограничительным. Что же касается условия 3, то оно выделяет обычно класс так называемых равновесных обратимых процессов, которые возможны во многих физических средах.

Внутренней энергией \tilde{H} физического тела называется среднее по ансамблю значение энергии H :

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\mu, \theta) &= \langle H \rangle = \int_{\Gamma} H(p, q, \mu) f(H, \theta) dp dq = \tilde{K} + \tilde{U}, \\ \tilde{K}(\theta) &= \langle K \rangle = \int_{\Gamma} K(p, q) f(H, \theta) dp dq, \\ \tilde{U}(\mu, \theta) &= \langle U \rangle = \int_{\Gamma} U(q, \mu) f(H, \theta) dp dq,\end{aligned}\tag{2.4}$$

где \tilde{K} — кинетическая (тепловая) составляющая, \tilde{U} — потенциальная.

Энергия $H(p, q, \mu)$ каждой системы $S_N^{(\alpha)}$, имеющая для нее постоянное значение $H = E^{(\alpha)}$, зависит от внешних параметров $\mu(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \dots)$, определяющих внешнее силовое поле и границу объема V , занятого системой. Среди μ_r находятся сам объем V , геометрические параметры, определяющие форму границы объема V , координаты внешних тел, действующих на систему S_N , и т. п. Они одинаковы для всех систем $S_N^{(\alpha)}$ ансамбля. Поэтому параметры μ_r можно назвать *внешними*. Параметры $\theta(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s, \dots)$ называются *внутренними макроскопическими параметрами*: от них зависит f , но не H .

Равновесным процессом изменения состояния тела называется непрерывная последовательность равновесных его состояний, получаемая непрерывным изменением макроскопических внешних и внутренних параметров μ, θ ; при этом, конечно, сам вид функций $H(p, q, \mu)$, $f(H, \theta)$, $\tilde{H}(\mu, \theta)$ не изменяется, т. е. их изменения за счет приращений μ_r, θ_s выражаются полными дифференциалами:

$$\delta H = \sum_r \frac{\partial H}{\partial \mu_r} \delta \mu_r = \sum_r \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mu_r} \delta \mu_r,$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial H} \delta H + \sum_s \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \delta \theta_s, \quad (2.5)$$

$$\delta \tilde{H} = \sum_r \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mu_r} \delta \mu_r + \sum_s \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_s} \delta \theta_s, \dots$$

Эти выражения верны независимо от того, возрастают или убывают параметры μ , θ во времени; при заданных числовых значениях p , q , μ , θ , $\delta \mu$, $\delta \theta$ вариации δH , δf , $\delta \tilde{H}$, ... суть постоянные числа, так как коэффициенты при вариациях в правых частях равенства явно от времени не зависят. Такие свойства связей между вариациями различных определяющих систему функций типичны для обратимых процессов.

По аналогии с определением сил, действующих на частицы системы S_N через производные от потенциала U по координатам точек, в выражении δH производные

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_r} = \frac{\partial U}{\partial \mu_r} = P_r, \quad (2.6)$$

можно определить как истинные внешние силы, действующие на систему S_N со стороны внешних тел. Заметим, что так как μ_r — «координата» внешнего тела, то сила

$$-\frac{\partial U}{\partial \mu_r} = (-P_r)$$

действует на внешние тела со стороны системы.

Поскольку $H = E^{(\alpha)}$ различны для разных систем ансамбля, то различны и силы P_r . Средней внешней силой \tilde{P}_r , соответствующей параметру μ_r и действующей на тело, называется среднее по ансамблю значение P_r :

$$\tilde{P}_r = \langle P_r \rangle = \int_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \mu_r} f dp dq. \quad (2.7)$$

Работа $\delta' \tilde{A}$, сообщаемая телу при изменении внешних параметров, определяется суммой $\tilde{P}_r \delta \mu_r$ по r и равна, очевидно, среднему по ансамблю значению вариации функции Гамильтона $\langle \delta H \rangle$:

$$\delta' \tilde{A} = \sum_r \tilde{P}_r \delta \mu_r = \langle \delta H \rangle = \int_{\Gamma} \delta H f dp dq. \quad (2.8)$$

Отметим два важных соотношения, используемых в дальнейшем. Варьируя по параметрам μ , θ нормировочное соотношение (2.3), необходимо учитывать, что граница области интегрирования Γ зависит от некоторых из параметров μ_r ; но, как уже отмечалось, значение функции f на этой границе при любом значении

μ , равно нулю. Следовательно, знак вариации по μ и θ в (2.3) можно внести под интеграл, тогда

$$\int_{\Gamma} \delta f dp dq = 0. \quad (2.9)$$

По такой же причине для любой функции $\mathcal{F}(p, q, \mu, \theta)$ среднее ее значение по ансамблю

$$\tilde{\mathcal{F}} \equiv \langle \mathcal{F} \rangle = \int_{\Gamma} \mathcal{F}(p, q, \mu, \theta) f(H, \theta) dp dq \quad (2.10)$$

варьируется так, как будто граница области Γ не зависит от μ, θ :

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = \delta \int_{\Gamma} \mathcal{F} f dp dq = \int_{\Gamma} \delta (\mathcal{F} f) dp dq. \quad (2.11)$$

Теперь получим первый основной закон термодинамики. Варьируя выражение внутренней энергии \tilde{H} (2.4) по параметрам μ и θ и учитывая свойство (2.11), находим

$$\delta \tilde{H} = \int_{\Gamma} \delta (Hf) dp dq = \int_{\Gamma} \delta H f dp dq + \int_{\Gamma} H \delta f dp dq,$$

или на основании (2.8)

$$\delta \tilde{H} = \delta' \tilde{A} + \int_{\Gamma} H \delta f dp dq = \delta' \tilde{A} + \delta' \tilde{Q}, \quad (2.12)$$

где

$$\delta' \tilde{Q} = \int_{\Gamma} H \delta f dp dq. \quad (2.13)$$

Если энергия всех систем ансамбля одинакова, т. е. $H = E^{(a)} = E = \text{const}$, то согласно (2.9)

$$\delta' \tilde{Q} = E \int_{\Gamma} \delta f dp dq = 0.$$

Тело, представляемое ансамблем системы S_N , в этом случае называют заключенным в адиабатическую оболочку, процесс изменения состояния его — *адиабатическим*. Изменение внутренней энергии при этом согласно (2.12) равно работе внешних сил $\delta \tilde{H} = \delta' \tilde{A}$.

В общем случае равновесного процесса из (2.12) следует, что $\delta \tilde{H} \neq \delta' \tilde{A}$; величина $\delta' \tilde{Q}$ (2.13) называется *количеством тепла*, сообщаемым телу извне. Это количество в феноменологической термодинамике определено независимо и до создания статистической теории. Формула (2.13) позволяет вычислить его теоретически, если известны функции H и $f(H, \theta)$.

Назовем *энтропией* s тела величину, пропорциональную среднему значению по ансамблю логарифма вероятности f :

$$s(\mu, \theta) = -k \langle \ln f(H, \theta) \rangle = -k \int_{\Gamma} f \ln f dp dq, \quad (2.14)$$

где k — константа (постоянная Больцмана). Один из параметров θ , назовем температурой тела θ_1 и потребуем, чтобы количество тепла $\delta'Q$ имело интегрирующий множитель θ_1^{-1} и с этим множителем представляло полный дифференциал (по параметрам μ, θ) энтропии s :

$$\frac{1}{\theta_1} \delta'Q = \delta s. \quad (2.15)$$

Мы потребовали, по существу, чтобы введенные количества $\delta'Q$, s и θ_1 удовлетворяли второму закону феноменологической термодинамики обратимых процессов, так как (2.15) имеет форму выражения этого закона. Поэтому вывод может казаться случайным. Но ведь и количеством тепла выражение

$$\int_{\Gamma} H \delta f dp dq$$

названо тоже из сопоставления формулы (2.12) с выражением первого закона термодинамики. Необходимо еще проверить, при каких условиях справедливо уравнение (2.15), так как количество тепла $\delta'Q$ уже определено выражением (2.13), вариация δs может быть найдена из (2.14), параметры θ , еще не определены. В статистической трактовке, т. е. с учетом (2.13) и (2.14), уравнение (2.15) должно быть тождеством, как и уравнение (2.12), выражающее первый закон. Из (2.14) находим вариацию δs :

$$\delta s = -k \int_{\Gamma} \delta(f \ln f) dp dq = -k \int_{\Gamma} \ln f \delta f dp dq - k \int_{\Gamma} \delta f dp dq,$$

или, учитывая (2.9),

$$\delta s = -k \int_{\Gamma} \ln f \delta f dp dq. \quad (2.16)$$

Внесем выражения (2.13), (2.16) в (2.15) и перепишем полученное уравнение в виде

$$\int_{\Gamma} \left[k \ln f(H, \theta) + \frac{1}{\theta_1} H \right] \delta f dp dq = 0. \quad (2.17)$$

Чтобы для любой вариации δf этот интеграл равнялся нулю, в соответствии с (2.9) необходима и достаточна независимость от

(p, q) подынтегрального выражения, стоящего в квадратных скобках. Обозначая это выражение через θ_2/θ_1 , т. е.

$$k\theta_1 \ln f + H = \theta_2, \quad (2.18)$$

и усредняя (2.18) по ансамблю, получим

$$\theta_2 = \bar{H} - \theta_1 s. \quad (2.19)$$

В макротермодинамике такое выражение известно как выражение *свободной энергии Гельмгольца* $\theta_2 \equiv \psi$ через внутреннюю энергию \bar{H} , энтропию s и *абсолютную температуру* $\theta_1 = T$ в градусах Кельвина, если в (2.14) множитель k является постоянной Больцмана. Таким образом, уравнение (2.15) действительно выражает второй закон термодинамики, если функция вероятности f имеет вытекающее из (2.18) выражение

$$f = e^{-(H-\psi)/kT}, \quad (2.20)$$

где T — абсолютная температура и ψ — свободная энергия

$$\psi = \bar{H} - Ts. \quad (2.21)$$

Последняя, конечно, может быть функцией внешних параметров μ_r и температуры T .

Ансамбль системы S_N , определяемый функцией распределения f (2.20), называется *каноническим ансамблем Гиббса*. Найдем из (2.20)

$$\psi = \bar{H} + kT \langle \ln f \rangle. \quad (2.22)$$

Одна из основных задач статистической термодинамики состоит в нахождении *уравнений состояния* тела, т. е. связей между внешними силами \tilde{P}_r , внешними параметрами μ_r и температурой T , а также в определении энтропии s . Покажем, что если свободная энергия известна как функция μ_r и T , т. е. $\psi = \psi(\mu, T)$, где, как и прежде, μ — совокупность $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \dots)$, то уравнения состояния и энтропия вполне определены. Для этого перепишем уравнения (2.12), (2.15), выражающие два основных закона термодинамики, в виде

$$\delta \tilde{H} = \sum_r \tilde{P}_r \delta \mu_r + \delta' \tilde{Q}, \quad (2.23)$$

$$T \delta s = \delta' \tilde{Q}$$

и используем их следствие

$$\delta \tilde{H} - T \delta s = \sum_r \tilde{P}_r \delta \mu_r.$$

Внося в это уравнение выражение $\delta\tilde{H}$, вытекающее из (2.21), получим основное термодинамическое соотношение

$$\delta\psi + s\delta T = \sum_r \tilde{P}_r \delta\mu_r. \quad (2.24)$$

Отсюда получаем выражение для энтропии и уравнения состояния системы:

$$s = -\partial\psi/\partial T, \quad \tilde{P}_r = \partial\psi/\partial\mu_r, \quad (r=1, 2, 3, \dots). \quad (2.25)$$

Теплоемкостью системы при постоянных значениях параметров μ_r называется количество тепла, необходимое для нагревания единицы ее массы на один градус Кельвина:

$$c_\mu = \frac{\delta\tilde{Q}}{M_N \delta T} = \frac{1}{M_N} \frac{\partial\tilde{H}}{\partial T},$$

что при $\mu_r = \text{const}$ следует из (2.23); при этом M_N обозначает массу системы. На основании (2.21), (2.25) получаем

$$M_N c_\mu = T \frac{\partial s}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}. \quad (2.26)$$

Итак, основная задача сводится к определению свободной энергии $\psi(\mu, T)$ по заданной функции Гамильтона системы $H(p, q, \mu)$. Для конкретных физических сред это почти всегда трудная задача. Выражение ψ через H в виде функции *интеграла состояний* $Z(\mu, T)$, определяемого интегралом по всей фазовой области Γ формулой

$$Z(\mu, T) = \int_{\Gamma} e^{-H(p, q, \mu)/kT} dp dq, \quad (2.27)$$

находится просто из условия (2.3) нормировки функции f (2.20)

$$\int_{\Gamma} e^{-(H-\psi)/kT} dp dq = e^{\psi/kT} Z = 1.$$

Отсюда

$$\psi(\mu, T) = -kT \ln Z(\mu, T). \quad (2.28)$$

Для простых систем, т. е. состоящих из частиц, которые достаточно точно представимы материальными точками, выражение интеграла Z несколько упрощается, так как для них

$$H = \sum_{i=1}^{n=3N} \frac{p_i^2}{2m} + U(q, \mu).$$

Интеграл состояний представляется в виде произведения двух интегралов: одного — по области Γ_p от функции, зависящей только от q , который обозначим

$$D(\mu, T) = \left(\int_{\Gamma_q} e^{-U(q, \mu)/kT} dq \right)^{2/3N}, \quad (2.29)$$

и другого —

$$I(T) = \int_{\Gamma_p} e^{-\frac{1}{2kT} \sum_{i=1}^{3N} p_i^2/m} dp, \quad (2.30)$$

причем, конечно,

$$\begin{aligned} dq &= dq_1 dq_2 \dots dq_n, \\ dp &= dp_1 dp_2 \dots dp_n, \quad n=3N. \end{aligned}$$

Обычно предполагается, что область Γ_p изменения импульсов бесконечна, т. е. каждый импульс p_i изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому интеграл I представляет произведение $n=3N$ интегралов вида

$$I_1(T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p_i^2/2kTm} dp_i = \sqrt{2\pi kTm},$$

т. е. равен

$$I(T) = (B_1 T)^{3N/2}, \quad B_1 = 2\pi km. \quad (2.31)$$

Таким образом,

$$Z(\mu, T) = [B_1 T D(\mu, T)]^{3N/2}, \quad (2.32')$$

и потому для простых систем

$$\psi = -\frac{3}{2} NkT [\ln T + \ln D(\mu, T) + \ln B_1], \quad (2.32)$$

$$\tilde{H} = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (2.33)$$

В качестве простейшего примера физической равновесной системы рассмотрим *разреженный одноатомный газ*, заключенный в объеме V . Атомы на больших расстояниях не взаимодействуют, имеют пути пробега в пределах всего объема V и кратковременно взаимодействуют только при «столкновениях». Поэтому такой

газ можно рассматривать как *идеальный*, т. е. потенциальную энергию U положить равной нулю. Из (2.29)

$$D^{3N/2} = \int_{\Gamma_q} dq = \int_{\Gamma_q} dq_1 dq_2 dq_3, \dots, dq_{3N} = \left(\int_V dq_1 dq_2 dq_3 \right)^N = V^N,$$

так как в произведении dq каждое последовательно одно за другим расположенное произведение трех дифференциалов декартовых координат различных точек образует дифференциал объема dV

$$dV = dq_1 dq_2 dq_3 = dq_4 dq_5 dq_6 = \dots$$

и все координаты изменяются в пределах всего объема V . Следовательно,

$$D = V^{2/3}, \quad (2.34)$$

причем $\mu = V$ — единственный внешний параметр системы. Из (2.33) находим свободную и внутреннюю энергии газа

$$\psi = -\frac{3}{2} NkT \left[\ln T + \frac{2}{3} \ln V + \text{const} \right], \quad (2.35)$$

$$\tilde{H} = \frac{3}{2} NkT.$$

Поскольку для рассматриваемого газа

$$\tilde{H} = \langle H \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m} \right\rangle = N \left(\frac{3}{2} kT \right),$$

то $3kT/2$ есть средняя кинетическая энергия одного атома

$$\frac{\tilde{m} \tilde{v}_k^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (2.36)$$

Внешней силой для нашего объема V газа является давление $-p$ ($p > 0$), так как работа $\delta' A$, сообщаемая газу, равна

$$\delta' A = -pdV.$$

Из (2.25) и (2.35) находим выражение энтропии и уравнение состояния:

$$s = Nk [\ln (VT^{3/2}) + \text{const}],$$

$$p = -\frac{\partial \psi}{\partial V} = \frac{NkT}{V}, \quad pV = NkT = RT. \quad (2.37)$$

Теплоемкость при постоянном объеме (при $M_N = Nm$) на основании (2.26) равна $c_v = 3k/(2m)$.

Неточность уравнения состояния (2.37) увеличивается с увеличением давления p . В табл. 2 дано значение pV/RT для тех же газов при различных p . Поправка для больших давлений и тем-

Таблица 2

Вещество	$p = 1$ бар	$p = 50$ бар	$p = 1000$ бар
He	1,0005	1,24	1,44
Ar	0,9999	0,971	1,675
N ₂	0,9998	0,996	1,99

ператур может быть найдена при учете потенциала взаимодействия молекул $u(q)$; тогда получается уравнение состояния

$$\frac{pV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots,$$

причем коэффициенты $B(T)$, $C(T)$ определяются путем вычисления интеграла состояний Z .

Из (2.36) найдем характерную скорость атома

$$\tilde{v}_c = V \tilde{v}_k^2 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 0,16 \sqrt{\frac{T}{M}} \text{ км} \cdot \text{с}^{-1},$$

где M — отношение массы молекулы вещества к массе атома водорода (точнее 1/16 атома кислорода).

Используем еще некоторые другие формулы для средних величин, вытекающие из кинетической теории газа. Длина l свободного пробега атома, имеющего эффективный диаметр d , выражается через скорость \tilde{v}_c , число молекул в единице объема N/V и число столкновений одной молекулы в единицу времени $n_{ст}$:

$$l = \frac{\tilde{v}_c}{n_{ст}}, \quad n_{ст} = \frac{\pi V \tilde{v}_c^2}{V} N d^2 \tilde{v}_c.$$

Сведения о некоторых газах даны в табл. 3 для $T=300$ К.

Таблица 3

Вещество	M	$d, \text{Å}$	$l, \text{Å}$	$n_{ст}, \text{с}^{-1}$	$v_c, \text{км} \cdot \text{с}^{-1}$
He	4,0	2,2	1936	$6,5 \cdot 10^9$	1,26
Ar	39,9	3,6	694	$5,7 \cdot 10^9$	0,40
N ₂	28,0	3,7	654	$7,3 \cdot 10^9$	0,475

Геометрия *монокристалла* определяется относительным положением атомов, точнее, их ядер, в *элементарной кристаллической решетке*.

Потенциальную энергию $U(q)$ электрически нейтральной системы частиц представляют, например, в виде суммы потенциалов парного взаимодействия частиц типа потенциала «6—12».

$$U(q) = \sum_{k_1, k_2} u(|\mathbf{r}_{k_1 k_2}|),$$

где $\mathbf{r}_{k_1 k_2}$ — радиус-вектор, соединяющий k_1 -ю и k_2 -ю частицы $\mathbf{r}_{k_1 k_2} = \mathbf{r}_{k_1} - \mathbf{r}_{k_2}$. Обозначая \mathbf{r}_k^0 , \mathbf{q}_k начальный постоянный радиус-вектор k -й частицы и вектор ее смещения относительно точки \mathbf{r}_k^0 , так что $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^0 + \mathbf{q}_k$, получим $U(q)$ в виде функции всех q_i и начальных координат точек. Для идеального кристаллического тела с периодической решеткой при *малых колебаниях атомов около положения равновесия* ($q_i = 0$), в котором U минимально

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_j=0} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n = 3N), \quad (2.38)$$

ограничимся для малых деформаций квадратичными членами разложения U в ряд по q :

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j. \quad (2.39)$$

Постоянные взаимодействия c_{ij} и начальная энергия U_0 в состоянии $q_i = 0$ зависят от параметров этого состояния μ , например, деформации решетки. Интеграл состояний Z в этом случае имеет вид (2.32'), причем D можно вычислить, допуская, что координаты q_i изменяются в бесконечной области ($-\infty \leq q_i \leq \infty$). При этом условие $f=0$ на границах Γ_p и Γ_q выполняется, так как квадратичная форма (2.39) положительна.

Вычисление интеграла D (2.29) как функции констант U_0 и c_{ij} может быть выполнено приведением входящей в (2.39) квадратичной формы к сумме квадратов или на основе упрощений матрицы $\|c_{ij}\|$ в случае парных потенциалов. Более сложный вопрос уточнения физического смысла параметров $\mu(\mu_r)$ как характеристик деформации кристаллической решетки монокристалла в равновесном состоянии ($q_i = 0$) в простейшем случае решается на основе понятия *аффинной деформации окрестности точки* сплошной среды (гл. II).

Поэтому рассмотрим *одномерную модель монокристалла* в виде линейной цепочки n атомов одинаковой массы m , расположенных вдоль оси x на одинаковом расстоянии a в нулевом равновесном состоянии S_n^0 и на расстоянии μa в деформированном равно-

весном состоянии S_n^1 . Для определенности введем границы системы: неподвижный нулевой атом с координатой $x_0=0$ и подвижный $(n+1)$ -й атом с координатой x_{n+1} , равной $x_{n+1}^0=(n+1)a$ в состоянии S_n^0 , $x_{n+1}^1=(n+1)\mu a$ — в состоянии S_n^1 ; взаимодействие первого и n -го атома системы с граничными пусть будет для простоты таким же, как с соседними атомами системы; именно из этих граничных условий следует равномерное в S_n^1 распределение удлинения цепочки, т. е. расстояния между границами $x_{n+1}^1 - x_0^0 = (\mu-1)(n+1)a$, по $(n+1)$ энергетическим ячейкам, следовательно, и положение m -го атома $x_m^1 = m\mu a$ в S_n^1 .

Статистическое состояние S' в момент t определяется координатами $x_m(t) = x_m^1 + q_m(t)$ для $m=1, 2, \dots, n$, ($q_0(t)=0$, $q_{n+1}(t)=0$). Потенциал парного взаимодействия m и $m+1$ атомов $u(r_{m,m+1})$ при $r_{m,m+1} = x_{m+1} - x_m = \mu a + \Delta q_m$, ($m=0, 1, \dots, n$) и $\Delta q_m = q_{m+1} - q_m$ приводит к представлению U в виде

$$U = \sum_{m=0}^n u(r_{m,m+1}) = (n+1) u(\mu a) + \frac{1}{2} u''(\mu a) \sum_{m=0}^n (\Delta q_m)^2, \quad (2.40)$$

$$u''(\mu a) = \left. \frac{d^2 u(r)}{dr^2} \right|_{r=\mu a}.$$

Для вычисления интеграла D введем вместо q_m новые переменные, поскольку $u''(\mu a) > 0$,

$$\xi_m = q_m \sqrt{\frac{u''(\mu a)}{2kT}}, \quad \Delta \xi_m = \xi_{m+1} - \xi_m.$$

Получим из (2.29) (при $n \gg 1$)

$$D(\mu, T) = A \frac{kT}{u''(\mu a)} \exp\left(-\frac{2u(\mu a)}{kT}\right), \quad (2.41)$$

где A — число. Свободную энергию, приходящуюся на один атом, согласно (2.32), и ее производную по μ , т. е. растягивающую силу, находим из формул

$$\begin{aligned} \psi_1(\mu, T) &= \psi/n = u(\mu a) + \frac{1}{2} kT \ln u''(\mu a) - kT \ln T, \\ P_\mu &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial \mu} = au'(\mu a) + kT \frac{au'''(\mu a)}{2u''(\mu a)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Первое слагаемое в выражении силы определяет ее при $T=0$, обращаясь в ноль при $\mu=1$. Второе дает поправку на тепловые колебания атомов при $T>0$

В области устойчивых состояний цепочки $u''(\mu a) > 0$. При $u'''(\mu a) < 0$ нагревание системы уменьшает силу, необходимую для удерживания деформаций $\varepsilon = \mu - 1 > 0$.

На примере потенциала «6—12», для которого в (2.42)

$$au'(\mu a) = 12k\Theta_1(\mu^{-7} - \mu^{-13}) = 72k\Theta_1\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$au'''(\mu a)/u''(\mu a) = 14 \frac{4\mu^{-9} - 13\mu^{-15}}{-7\mu^{-8} + 13\mu^{-14}},$$

видим, что для выявления тонких термомеханических эффектов представление U квадратичной формой (2.39) недостаточно: модуль упругости цепочки зависит от T через $u'''(r)$, которая отброшена в (2.40).

Глава II

КИНЕМАТИКА И ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ МСС. ЛАГРАНЖЕВО И ЭЙЛЕРОВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Будем рассматривать настолько большие тела, что весьма малые их части объема dV содержат достаточно много частиц, и потому для этих малых областей тела можно ввести понятия макроскопических величин плотности тела, перемещения, скорости, ускорения, внешних сил, внутренней энергии и других в смысле средних по ансамблю (§ 1). Идеализация истинного физического тела в МСС состоит в том, что все рассматриваемые величины принимают в качестве истинных. Количество и математическая природа вводимых средних величин таковы, что с достаточной точностью можно описать внутреннее состояние тела и взаимодействие между телами. В основах МСС главным образом рассматриваются механические и тепловые взаимодействия и деформации малых объемов, иногда учитывается действие на них электромагнитных полей, химических реакций и др.

Для изображения состояний и процессов в МСС используется трехмерное евклидово пространство с различными системами координат и классическое время. Выбор системы координат произволен и не должен сказываться на физических следствиях получаемых уравнений. *Значит, математические объекты, характеризующие физические явления, не должны зависеть от частного выбора системы координат, а физические законы должны выражаться через эти объекты математическими соотношениями, инвариантными относительно преобразований системы координат.*

Основные математические объекты МСС суть тензоры различных порядков: нулевого — скаляры (плотность, энергия), первого — векторы (радиус-вектор, поток тепла, скорость), второго — тензоры деформаций, внутренних напряжений, третьего и четвертого — тензоры пьезоэлектрических констант, коэффициентов вязкости и упругости и др. *Все эти тензоры считаются непрерывно дифференцируемыми* достаточное число раз по координатам и по времени, ограничены вместе с их производными в области тела. Все они введены в XIX веке в процессе создания теории упругости, гидромеханики и других разделов теоретической физики, и затем в алгебре и геометрии была создана их общая теория.

Определения основных величин в МСС можно рассматривать и как априорные, и тогда получающиеся уравнения, подобно закону Ньютона для точки $m\ddot{x}=F_x$, станут содержательными законами только на основании экспериментально обоснованных гипо-

тез, устанавливающих дополнительные связи между введенными величинами. В случае $m\ddot{x}=F_x$ дополнительная связь дается гипотезой $F_x=f(x, \dot{x}, t)$. Решение уравнения $m\ddot{x}=f(x, \dot{x}, t)$ составляет математическую, а нахождение $F_x=f(x, \dot{x}, t)$ (точнее, функционала $F_x=F_0^t(x(\tau))$, где $x(\tau)$ — значения x в любой предшествующий момент времени $0 \leq \tau \leq t$) — физическую задачу. Стремление сохранить понятия и общий вид (форму) соотношений между вводимыми величинами такими же, как в механике системы и термодинамике, подсказывает целесообразный набор и характер вводимых в МСС величин. Каждое из вводимых ниже определений изучающему МСС целесообразно сопоставить с соответствующим средним по ансамблю (по времени), считая, что системе S_N соответствует некоторая конечная (m) или «бесконечно малая» (ρdV) масса.

Пусть G — произвольная конечная область неподвижного пространства наблюдателя, $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ — радиус-вектор некоторой его точки, V — объем, Σ — граница G , \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали в какой-нибудь точке \mathbf{x}_Σ границы Σ , $dV=dx_1dx_2dx_3$ — элемент объема; $d\Sigma=\mathbf{v}d\Sigma$ — вектор, элемент площади поверхности Σ .

Плотностью среды в некоторой точке \mathbf{x} в момент времени t назовем неотрицательную однозначную функцию $\rho(\mathbf{x}, t)$, определенную в области G и на границе Σ , а также в окрестности Σ со стороны внешней нормали \mathbf{v} , причем такую, чтобы *массой среды* в объеме V была величина интеграла по объему V области G :

$$m = \int_V \rho dV.$$

Координатой центра масс называется точка \mathbf{x}_c , определяемая равенством

$$m\mathbf{x}_c = \int_G \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

Расширенную область G , включающую границу Σ и окрестность со стороны внешней нормали, обозначим G^* . Предполагая G односвязной и стягивая ее внутрь G^* к точке \mathbf{x} , заключаем, что $\rho(\mathbf{x}, t)dV$ есть масса среды в объеме dV , а \mathbf{x}_c отличается от \mathbf{x} на величину порядка $\Delta l = \sqrt[3]{dV}$.

Пусть дано поле вектора $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, называемого скоростью среды. Величину $\rho dV \mathbf{v}$ назовем импульсом, или количеством движения массы ρdV ; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — *вектором скорости массы* ρdV . *Количеством движения массы* m естественно назвать тогда выражение

$$m\mathbf{v}_c = \int_V \rho \mathbf{v} dV,$$

\mathbf{v}_c — *вектором скорости центра масс*.

Движущейся границей Σ_g (с внутренним объемом V_g) неизменной массы m_g среды называется граница Σ односвязной области G , любая точка M которой при изменении времени t на $t+dt$ перемещается по нормали на величину $v v dt$, оставаясь в области G^* , причем v и внешняя нормаль v берутся в одной и той же точке M на Σ_g . Скорость изменения объема V_g области, занимаемой неизменной массой, будет

$$\frac{dV_g}{dt} = \int_{\Sigma_g} v v d\Sigma. \quad (3.1)$$

Ниже на выкладках, сопровождающих утверждения и определения, можно не сосредоточивать особого внимания, так как они обстоятельно делаются в следующих параграфах.

Среда с массой m_g , заключенная внутри движущейся поверхности, называется фиксированной физической частью тела или физической частицей. Бесконечно малой частицей будем называть среду с массой ρdV .

Координата $x_g(t)$ центра массы частицы

$$x_g = \frac{1}{m_g} \int_{V_g} x \rho(x, t) dV,$$

как и ее скорость $v_g(t)$

$$v_g = \frac{1}{m_g} \int_{V_g} \rho v dV,$$

будут изменяться со временем.

Стремясь сохранить кинематическое соотношение механики системы материальных точек между скоростью и координатой центра масс, положим

$$v_g(t) = \frac{dx_g(t)}{dt}.$$

Стягивая G в точку x , получим

$$x_g = x + O(\sqrt[3]{dV}); \quad v_g = v + O(\Delta l).$$

Таким образом, значение $v(x, t)$ в точке x можно рассматривать как скорость движения бесконечно малой частицы или точки среды с координатой x в момент t . Если x — радиус-вектор бесконечно малой частицы, меняющийся по закону $x(t)$, то ее скорость $v(x, t)$ равна \dot{x} . Отсюда получается дифференциальное уравнение движения бесконечно малой частицы:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t). \quad (3.2)$$

Решение этого уравнения при начальном условии

$$t=0, \quad x=x$$

дает закон движения точки среды

$$x=x(x, t). \quad (3.3)$$

По свойству функции $v(x, t)$ решение (3.3) однозначно и непрерывно по x, t , откуда следует непрерывность преобразования начальной области, занятой средой, в область, занятую ею в момент t .

Разность

$$u=x-x=u(x, t)=U(x, t) \quad (3.3')$$

называется *вектором перемещения* бесконечно малой частицы и на основании (3.3) может рассматриваться, как и все другие приписываемые ей величины, как функция либо x, t , либо x, \dot{t} .

Понятие плотности ρ сплошной среды в МСС доопределяется требованием, чтобы масса, заключенная внутри границы Σ_g , не изменялась во времени, т. е.

$$\frac{dm_g}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{V_g} \rho(x, t) dV = \int_{V_g} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Sigma_g} \rho v v d\Sigma. \quad (3.4)$$

Именно это требование ставит величину ρ в соответствие постоянству числа частиц системы S_N , а v — средней по ансамблю скорости системы (§ 1) и называется *законом сохранения массы*. Соотношение (3.4) приводится к виду (1.44)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (3.5)$$

На основе понятия частицы естественно вводится понятие *массовой силы*, действующей на частицу, как интеграла по V_g от $F(x, t)\rho dV$, и потому полевой вектор $F(x, t)$ рассматривается как сила, действующая на единицу массы, а $F\rho dV$ — на объем $(dV)_g$ бесконечно малой частицы.

Также вводится *ускорение* $w(x, t)$ бесконечно малой физической частицы:

$$w(x, t) \equiv \frac{dv(x, t)}{dt},$$

где x удовлетворяет уравнению (3.2).

Так как из (3.3) $x=x(x, t)$, то

$$w \equiv \frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.6)$$

где конвективное ускорение, т. е. вектор $\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$, имеет компоненты

$$v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}, \quad i=1, 2, 3.$$

Скорость изменения во времени какой-нибудь функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, характеризующей физические свойства частицы в (\mathbf{x}, t) ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}},$$

где

$$\mathbf{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} = v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

называется *полной, или субстанциональной, производной* φ . Согласно (3.6) ускорение есть полная производная скорости по времени.

Кинетическая энергия K_g частицы в объеме V_g , *внутренняя энергия* U_g , *энтропия* S_g и другие *экстенсивные* (пропорциональные массе частицы) величины вводятся по их определению для постоянной массы m_g , т. е. соответственно

$$K_g = \int_{V_g} \frac{\rho v^2}{2} dV, \quad U_g = \int_{V_g} \rho u dV, \quad S_g = \int_{V_g} \rho s dV, \dots, \quad (3.7)$$

где u, s — плотности внутренней энергии и энтропии в точке среды. *Свободная энергия* $\psi(\mathbf{x}, t)$ определяется соотношением

$$\psi = u - Ts,$$

совпадающим с определением (2.21). *Температура* $T(\mathbf{x}, t)$ и другие *интенсивные* величины вводятся как некоторые полевые функции \mathbf{x}, t ; все эти функции доопределяются уравнениями

Изучаемые в МСС величины — аналоги величин классической, статистической механики и термодинамики замкнутой системы, хотя исторически они введены в МСС до создания статистической механики и совершенно независимо. (Некоторые из них введены в статистическую механику позднее как аналоги понятий МСС, например понятия напряжений, деформаций, потока тепла).

Вводимые в МСС для m_g аналоги уравнений количества движения и момента количества движения абсолютно твердого тела приводят к понятию *внутреннего напряжения* \mathcal{P} , на площадке с единичной нормалью \mathbf{v} .

Поскольку векторы внешней массовой силы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ и ускорения $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ уже введены, найдем сумму массовых сил и сил инер-

ции, действующих на массу m_g в объеме V_g . На основании ранее введенных определений эта сумма равна

$$m_g \mathbf{F}_g - m_g \mathbf{w}_g = \int_{V_g} \rho (\mathbf{F} - \mathbf{w}) dV. \quad (3.8)$$

Эта сумма не равна нулю, так как на m_g еще действует окружающая среда. Следовательно,

$$\begin{aligned} -m_g \mathbf{w}_g + m_g \mathbf{F}_g + \mathcal{P}_g &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{F} + \mathcal{P}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

По аналогии с динамикой абсолютно твердого тела \mathcal{P}_g трактуется как сумма всех сил, действующих на поверхность Σ_g тела. Следовательно, необходимо ввести плотность вектора силы $\mathcal{P}_v(\mathbf{x}, t)$ в каждой точке поверхности Σ_g и понимать ее как действие в этой точке на Σ_g части тела, находящейся вне Σ_g . При таком понимании мы должны считать $\mathcal{P}_v(\mathbf{x}, t)$ зависящим не только от \mathbf{x} , t , но и от ориентации площадки $d\Sigma = \mathbf{v} d\Sigma$, т. е. от \mathbf{v} . Значит, \mathcal{P}_v — сложный вектор, структуру которого надо выяснить. Входящий в уравнение (3.9) вектор \mathcal{P}_g выражается через \mathcal{P}_v :

$$\mathcal{P}_g = \int_{\Sigma} \mathcal{P}_v d\Sigma. \quad (3.10)$$

Пусть поверхность Σ_g в момент t совпадает с поверхностью малой области, имеющей вид прямоугольного координатного параллелепипеда (рис. 3.1) с бесконечно малыми ребрами a_1, a_2, a_3 . На каждой грани вектор \mathbf{v} постоянен, координаты \mathbf{x} отличаются между собой на величины порядка a_1, a_2 или a_3 и, значит, с точностью до бесконечно малых \mathcal{P}_v постоянны в пределах каждой грани. Главный вектор сил, действующих со стороны поверхности на объем $dV = a_1 a_2 a_3$, получим сложением всех векторов $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{v_i}$ ($i = 1, 2, 3$) ($\mathbf{v}_i = \pm \mathbf{e}_i$ — единичный вектор нормали, направленной по оси x_i). Обозначая штрихом и двумя штрихами значения этих векторов на противоположных гранях, получаем главный вектор поверхностных сил, действующих на параллелепипед с ребрами a_1, a_2, a_3

$$\mathcal{P}_g = a_2 a_3 (\mathcal{P}_1'' - \mathcal{P}_1') + a_3 a_1 (\mathcal{P}_2'' - \mathcal{P}_2') + a_1 a_2 (\mathcal{P}_3'' - \mathcal{P}_3').$$

Применив теперь соотношение (3.9), получим с точностью до малых высшего порядка

$$(\rho \mathbf{w} - \mathbf{F}) a_1 a_2 a_3 = \mathcal{P}_g \equiv a_2 a_3 \Delta \mathcal{P}_1 + a_3 a_1 \Delta \mathcal{P}_2 + a_1 a_2 \Delta \mathcal{P}_3, \quad (3.10')$$

где $\Delta \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i'' - \mathcal{P}_i'$.

Поскольку эти разности имеют порядок a ,

$$\Delta \mathcal{P}_i = \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_i} a_i + O(a^2), \quad (3.11)$$

т. е. они стремятся к нулю при $a_i \rightarrow 0$, то, следовательно, выполняется закон равенства действия и противодействия: $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}''_i$. Внося значения (3.11) в (3.10') и сокращая на $a_1 a_2 a_3$, получим

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} - F \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_i(x, t)}{\partial x_i}. \quad (3.12)$$

Если применить соотношение (3.9) к бесконечно малому координатному тетраэдру (рис. 3.2) с наклонной плоскостью, имеющей внешнюю нормаль ν с направляющими косинусами ν_i ($i=$

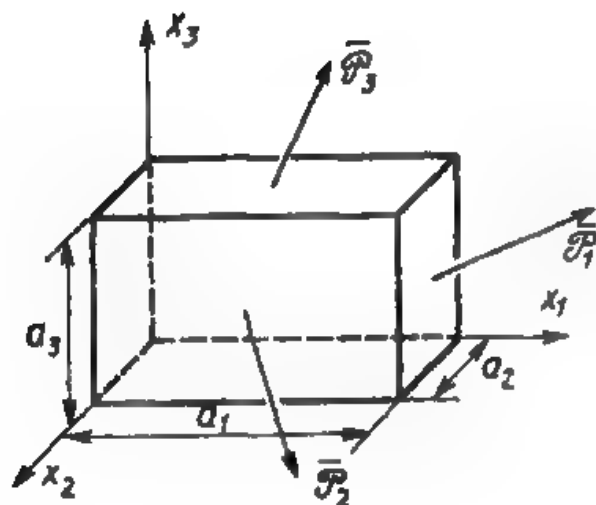


Рис. 3.1

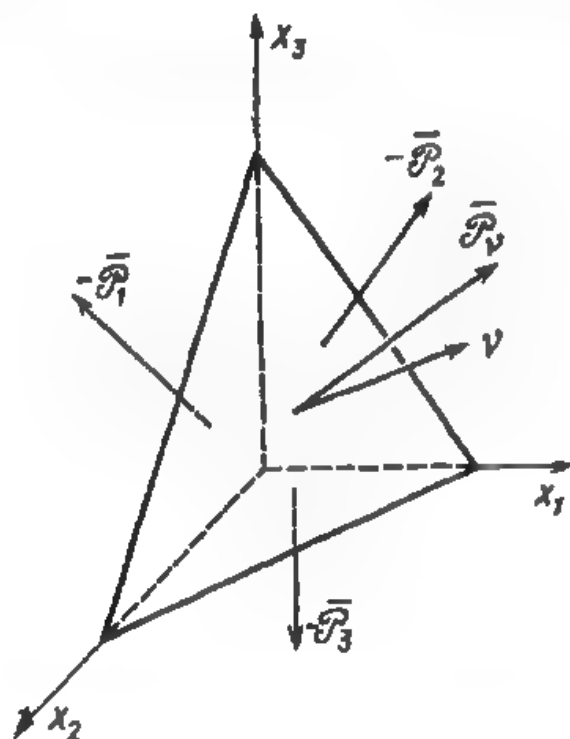


Рис. 3.2

$=1, 2, 3$), то аналогичными выкладками получим выражение плотности силы \mathcal{P}_ν на наклонной площадке через координатные векторы \mathcal{P}_i :

$$\mathcal{P}_\nu(x, t) = \sum \mathcal{P}_i \nu_i. \quad (3.13)$$

По определению входящие в (3.13) векторы $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ образуют объект, не зависящий от выбора системы координат (x_i), называемый в МСС *тривектором* или *тензором внутренних напряжений*. Здесь мы обозначим его $\tilde{\mathcal{P}}$; он вполне определен векторами \mathcal{P}_i

или их компонентами, обозначаемыми σ_{ij} в пространстве наблюдателя (x_i) :

$$\mathcal{P}_i = \sigma_{i1}e_1 + \sigma_{i2}e_2 + \sigma_{i3}e_3 \equiv \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}e_j. \quad (3.14)$$

Определение и уравнение момента количества движения вводится аналогично, для параллелепипеда (рис. 3.1) доказывается равенство $\mathcal{P}_i e_j = \mathcal{P}_j e_i$, т. е. согласно (3.14) — симметрия тензора $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Умножая выражение (3.12) на v и интегрируя результат по объему V_g массы m_g , после преобразований получаем закон сохранения механической энергии

$$\frac{dK_g}{dt} + W = A, \quad (3.15)$$

где A называется мощностью массовых сил F в объеме V_g и поверхностных сил \mathcal{P}_v на Σ_g , W — мощностью внутренних напряжений (тензора $\tilde{\mathcal{P}}$):

$$A = \int_{V_g} \rho F v dV + \int_{\Sigma_g} \mathcal{P}_v v d\Sigma, \\ W = \int_{V_g} W_1 dV, \quad W_1 = \sum_{i,j=1,2,3} \sigma_{ij} v_{ij}, \quad (3.16)$$

причем W_1 — плотность мощности. При этом в W_1 входят величины v_{ij} , образующие тензор скорости деформации с компонентами

$$v_{ii} = v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.17')$$

вполне определяемый вектором $v(x, t)$.

В МСС вводится также понятие тензора деформаций $\tilde{\epsilon} = (\epsilon_{ij})$, компоненты которого выражаются через первые производные вектора перемещения $u(x, t) = x - x$ на основании (4.18), (4.15) формулами

$$2\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (3.17)$$

Кинематический смысл v_{ij} и ϵ_{ij} состоит в том, что они однозначно определяют соответственно скорость изменения и изменение формы границы рассматриваемой физической частицы, которая при $t=t_0$ заключена в бесконечно малом кубике с ребром a^0 . Оказывается, что этот кубик в любой другой момент $t \geq t_0$ становится косоугольным параллелепипедом с размерами ребер поряд-

ка a^0 , изменение объема определяется плотностью $\rho(x, t)$, которая однозначно выражается через тензор e_{ij} .

Термодинамические соотношения в МСС вводятся в предположении, что малую частицу с массой m_g можно рассматривать как термодинамическую систему с макроскопически однородным по объему распределением средних по ансамблю, причем время τ_s системы мало настолько, что бесконечно малый с точки зрения МСС интервал времени dt очень велик сравнительно с τ_s и малая с позиций МСС частица $m_g = \rho dV_g$ является системой S_N с очень большим числом N частиц. К этому есть основания, так как масштабы рассматриваемых в МСС времен t и размеров тел l предполагаются несоизмеримыми с их масштабами для представительных систем статистической механики.

Применительно к m_g , имеющей форму кубика единичного объема, мощность W_1 является секундной работой внешних по отношению к m_g сил \mathcal{P}_i . За время dt работа их будет равна $W_1 dt$, приращение внутренней энергии равно $\rho \frac{du}{dt} dt$. «Сообщаемое тепло» обозначим $Q dt$ и положим в соответствии с законом сохранения энергии

$$\rho \frac{du}{dt} = W_1 + \dot{Q}, \quad (3.18)$$

причем u , W_1 , \dot{Q} — функции (x, t) при условиях (3.2), (3.3). Система S_N , составляющая m_g , за время $t - t_0$ прошла через последовательность очень большого числа различных состояний, медленно и мало меняющихся. Кроме внутреннего параметра — температуры $T(x, t)$ — внешними параметрами S_N являются изменяющийся обратно пропорционально $\rho(x, t)$ объем и «перекосы кубика», характеризуемые тензором $e_{ij}(x, t)$. Так как длительный процесс за время $t - t_0$ в целом необратимый, то компоненты тензора деформаций e_{ij} , вообще говоря, не являются параметрами состояния, определяющими плотность внутренней энергии $u(x, t)$.

Второй закон — баланса энтропии $s(x, t)$ — в МСС обычно записывается по аналогичным соображениям в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \dot{Q} + w^*, \quad w^* \geq 0, \quad (3.19)$$

где w^* называется рассеянием, или диссипацией. В системе S_N энтропия — функция тех же параметров состояния (μ_0, μ_1, \dots) , от которых зависит и u , но с учетом необратимости состояний m_g рассеяние w^* , вообще говоря, отлично от нуля. Свободная энергия вводится по определению формулой $\psi = u - Ts$.

Поток тепла определяется как вектор $q(x, t)$, создающий приток тепла \dot{Q}_g к частице через ее поверхность, точнее, q вместе с \dot{Q} определяют соотношениями

$$\dot{Q}_g \equiv \int_{V_g} \dot{Q} dV = - \int_{\Sigma_g} \mathbf{q} v d\Sigma, \quad (3.20)$$

в которых $\mathbf{q} v d\Sigma = \mathbf{q} d\Sigma$ — поток вектора \mathbf{q} через площадку $d\Sigma$ поверхности Σ_g в единицу времени. Иногда учитывают, что приток тепла \dot{Q} в единицу объема частицы может возникать не только через ее поверхность, но и прямо в объем (проникающий приток), чего для простоты здесь не рассматриваем. Из (3.20) формально следует

$$\dot{Q} = -\operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (3.21)$$

Вектор \mathbf{q} реализует *теплообмен* между соседними частицами и зависит от их состояния (обычно — градиента температуры), но не от скорости движения частиц.

Выпишем *сводку всех дифференциальных соотношений* между введенными пятью скалярными величинами ρ , T , u , s , w^* , двумя векторными \mathbf{v} , \mathbf{q} и двумя тензорными σ_{ij} , v_{ij} .

Сохранение массы (3.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (I)$$

сохранение импульса (3.12), (3.14):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial x_i}; \quad \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_j; \quad (II)$$

выражение тензора скоростей деформаций через вектор скорости \mathbf{v} (3.17') или тензора v_{ij} через перемещение u :

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad (III)$$

сохранение энергии (3.18), (3.21), (3.16):

$$\rho \frac{du}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} v_{ij} - \operatorname{div} \mathbf{q}; \quad (IV)$$

баланс энтропии (3.19), (3.21):

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + w^*. \quad (V)$$

Почти всегда вектор \mathbf{q} связывают с полем температур *законом Фурье*

$$\mathbf{q} = -\Lambda \operatorname{grad} T, \quad (VI)$$

где Λ — известная матрица коэффициентов теплопроводности.

Система (I) — (VI) *незамкнутая*, так как содержит три скалярных (I), (IV), (V), два векторных (II), (VI) и одно тензорное (III) дифференциальное уравнение 1-го порядка по t, x , иначе — 15 скалярных уравнений относительно 23 функций. Незамкнутость естественна, так как *среда не конкретизирована*.

Для некоторых сред и процессов число введенных скалярных величин уменьшается; в жидкостях часто тензор σ_{ij} сводится к одному давлению $p(x, t)$, для обратимых процессов принимается $\dot{\omega}^* = 0$, иногда поле температуры $T(x, t)$ считается известным и т. д.

Решением основной термомеханической задачи МСС для области G с границей Σ называются вектор перемещения u (или скорости v) и температура T , определенные для всех точек среды внутри G и на границе Σ на интервале времени $t_0 \leq \tau \leq t$. Для получения решения необходима замкнутая система уравнений для точек внутри G .

Замыкание приведенной выше системы уравнений в МСС базируется на понятии *макроскопически равновесного*, вообще говоря, *необратимого процесса* с диссипацией и на *основном постулате МСС* — *постулате макроскопической определенности* (гл. III). Задать такой *термомеханический* процесс Π_x в фиксированной точке $x = \text{const}$ среды — значит задать в фиксированной малой физической частице в окрестности этой точки на интервале времени $t_0 \leq \tau \leq t$ температуру $T(x, \tau)$ и тензор деформации $\varepsilon_{ij}(x, \tau)$ в виде функций времени τ ; задать некоторые начальные условия для них при $\tau = t_0$. При движении любой сплошной среды в различных ее точках происходят различные процессы, и потому можно определить некоторое множество процессов $M\Pi$, $\Pi_x \in M\Pi$, например, в виде множества дважды непрерывно дифференцируемых по (x, τ) функций $(T(x, \tau), \varepsilon_{ij}(x, \tau))$. *Постулат* означает, что для любого $\Pi_x \in M\Pi$ *реакция частицы*, передаваемая ею через границу в среду, — тензор напряжений и все функции, характеризующие состояние в момент t для среды заданной физической природы, являются определенными функционалами (операторами по $t_0 \leq \tau \leq t$ над функциями $T(x, \tau), \varepsilon_{ij}(x, \tau)$). Эти операторы существуют и, как и физические константы вещества, не зависят от конкретного вида $\Pi_x \in M\Pi$.

Если известен функционал, связывающий тензор напряжений с тензором деформаций и температурой

$$\tilde{S} = \tilde{S}[\tilde{\varepsilon}(x, \tau), T(x, \tau)]_{\tau=t_0}^t, \quad (\text{VII})$$

и известно поле температуры

$$T = T(x, t), \quad (\text{VIII})$$

то система уравнений (I), (II), (III), (VII), (VIII) вместе с (3.2) — (3.3') и (3.17) называется *замкнутой* для вектора перемещения u (или скорости v), т. е. является такой системой функциональных

уравнений для внутренних точек заданной области G пространства движения среды с границей Σ , для которой *существует решение* $u(x, t)$, если всюду в G задан вектор массовой силы $F(x, t)$, а на границе Σ и в начальный момент $t=t_0$ заданы некоторые граничные и начальные условия.

Если решение основной задачи известно, то для любых (x, t) известны и деформации, и внутренние напряжения согласно (VII), и все другие физические величины, определяемые заданными операторами по (x, t) над функциями $u(x, t)$, $T(x, t)$.

В МСС используются различные критерии для выбора физически возможного решения: *термодинамический критерий, критерий устойчивости* и др. Критерий устойчивости решения основной задачи базируется на том, что в физических задачах начальные и граничные условия, а также вектор массовой силы нельзя задать абсолютно точно, возможны некоторые небольшие отклонения, называемые возмущениями. Если решение задачи с возмущениями в некотором смысле мало отличается от решения основной задачи, последнее считается устойчивым.

Если в термомеханической задаче поле температуры не задано, то система уравнений (I), (II), (III), (VII) незамкнута и должна быть дополнена уравнением, определяющим температуру T . Для этого нужно рассмотреть *термодинамику* частицы постоянной массы $m=\rho\Delta V$. Пользуясь общепринятым неопределенным термином *энергия* и основным постулатом, можно утверждать, что если процесс изменения состояния частицы $\tilde{\theta}(\tau)$, $T(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, задан, то она в момент t за время dt выделяет и передает окружающей среде некоторую термомеханическую энергию $-\rho\Delta V du$, определяемую только природой вещества и процессом; сохраняя понятия мощности внешних сил \dot{W}_1 , количества сообщаемого частице извне тепла \dot{Q} и полной сообщаемой частице термомеханической энергии $(\dot{W}_1 + \dot{Q})\rho\Delta V dt$ такими же, как в макроскопически равновесных обратимых процессах, и пользуясь законом сохранения энергии (в общепринятом смысле), получаем равенство (3.18).

В МСС для термомеханических процессов «закон сохранения энергии» *постулируется* так: существует (для каждого вещества свой) функционал процесса

$$u[\tilde{\theta}(x, \tau), T(x, \tau)]_{t_0}^t, \quad (IX)$$

удовлетворяющий уравнениям (IV), (VI). Если известны функционалы \tilde{S} (VII) и u (IX), то система полученных уравнений замкнута. Существенно отметить, что эти функционалы определяются с помощью *макроскопических опытов*.

Понятия и соотношения МСС, как видно из изложенного, являются обобщениями тех, которые получаются в статистической механике в виде средних по всем группам частиц ($N=N_1+N_2+\dots+N_i$) или для S_N с частицами одного сорта ($N=N_1$). Оче-

видно, что возможны (и имеются) некоторые обобщения для систем, состоящих из двух сортов частиц ($N=N_1+N_2$), путем введения двух однотипных систем полевых функций типа $\rho, u, v, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{S}, T$ с сохранением одной «внутренней энергии» и $[\tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mathcal{E}}_2, T_1, T_2]'$, и т. п. Но эти вопросы выходят за рамки основ МСС. Вопросы влияния электромагнитного поля рассмотрены в гл. V.

Лагранжево и эйлерово представления движения сплошной среды. Пусть e_i ($i=1, 2, 3$) представляет неподвижный трехмерный ортогональный нормированный репер (базис) в пространстве наблюдателя:

$$|e_i|=1, e_i e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Сплошная среда движется и деформируется с течением времени t , занимая область объема V_0 в начальный момент времени $t=t_0$ и V — в момент t . Пусть *

$$x = x^i e_i = \sum_{i=1}^3 x^i e_i$$

обозначает радиус-вектор (x^i — ортогональные декартовы координаты) какой-нибудь физической точки M в момент $t=t_0$ и

$$x = x^i e_i \equiv \sum_{i=1}^3 x^i e_i$$

— радиус-вектор (x^i — ортогональные декартовы координаты) той же физической точки M в момент времени t .

Движение сплошной среды считается известным, если для любого t известна связь между x и x , т. е. известна вектор-функция

$$x = x(x, t) \equiv \varphi(x, t), \quad (3.22)$$

т. е. три скалярных соотношения:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(x^1, x^2, x^3, t) \equiv \varphi^1(x^1, x^2, x^3, t), \\ x^2 &= x^2(x^1, x^2, x^3, t) \equiv \varphi^2(x^1, x^2, x^3, t), \\ x^3 &= x^3(x^1, x^2, x^3, t) \equiv \varphi^3(x^1, x^2, x^3, t). \end{aligned} \quad (3.22')$$

Соотношение (3.22) называется *законом движения точки x* . Функции $x^i(x^1, x^2, x^3, t)$ считаются непрерывными и дифференци-

* В дальнейшем выражения вида $a_i b^i, A_i{}^j B_j{}^i, \dots$, т. е. одночлены, имеющие повторяющиеся индексы, означают суммы по ним от 1 до 3. В противном случае отсутствие суммирования при повторяющихся индексах будет оговорено; иногда для этой цели используют в качестве индексов буквы греческого алфавита либо обозначение вида $\langle i=1, 2, 3 \rangle$.

руемыми достаточное число раз по x и t ; соответствие между векторами \dot{x} и \dot{x} для каждого t считается взаимно однозначным, т. е. якобиан системы (3.22') отличен от нуля:

$$\left| \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right| \neq 0.$$

Следовательно, (3.22') разрешимы относительно x :

$$x = x(x, t) \equiv v(x, t), \quad \begin{cases} x^1 = x^1(x^1, x^2, x^3, t) \equiv v^1(x^1, x^2, x^3, t), \\ x^2 = x^2(x^1, x^2, x^3, t) \equiv v^2(x^1, x^2, x^3, t), \\ x^3 = x^3(x^1, x^2, x^3, t) \equiv v^3(x^1, x^2, x^3, t). \end{cases} \quad (3.23)$$

Точки области, где $\left| \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \right| = 0$ или $\left| \frac{\partial x}{\partial t} \right| = 0$, называются критическими.

Перемещение u , скорость v и ускорение w точки M в момент t равны

$$u = x - x, \quad v = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad (3.24)$$

причем u , v и w согласно (3.22) являются функциями x и t :

$$u = u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v(x, t), \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = w(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.24')$$

Однако, пользуясь обратными соотношениями (3.23), u , v и w можно выразить как функции x и t , например

$$v = v[x(x, t), t] = v(x, t). \quad (3.25)$$

Дифференцируя последнее выражение $v(x, t)$ как сложную функцию, найдем

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.26)$$

или подробнее

$$w(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + v^i \frac{\partial v}{\partial x^i} = \frac{\partial v}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v}{\partial x^3}. \quad (3.26')$$

Начальные координаты x , x^i ($i=1, 2, 3$) физической точки M зафиксированы, т. е. это определенные числа, которые остаются для этой физической точки постоянными при любом t . Говорят — координаты x^i заморожены в среду.

Все другие скалярные (плотность, температура, энергия и т. д.), векторные (поток тепла и т. д.) и тензорные (тензор напряжений и др.) величины, характеризующие состояние тела в окрестности точки M (иногда говорят — состояние частицы M) могут быть выражены в виде функций либо x и t , либо x и \dot{x} . Это-

му соответствуют два основных метода изучения движения сплошной среды: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Лагранжа. Координаты x^1, x^2, x^3 (вектор \mathbf{x}) называются *лагранжевыми координатами* точек тела. Это, вообще говоря, криволинейные координаты, хотя при $t=t_0$ они выбраны нами как декартовы. Действительно, семейство физических плоскостей $x^i = \text{const}$ при $t=t_0$, как видно из (3.23) и ясно из физических соображений, преобразуется в некоторое семейство поверхностей. Метод Лагранжа основывается на использовании лагранжевых координат и состоит в изучении движения частиц сплошной среды и всех необходимых параметров в виде функций \mathbf{x} и t . Вместо радиуса вектора $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}$ при этом часто используется вектор перемещения частицы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Скорость и ускорение частицы выражаются формулами (3.24').

Если какая-нибудь скалярная, векторная или тензорная функция \mathcal{F} определена для физической частицы, т. е. известна как функция лагранжевых координат \mathbf{x} и времени t , $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$, то скорость ее изменения во времени для этой частицы определяется частной производной $\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) / \partial t$. Разность же этой величины у двух соседних частиц (частицы $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ и частицы \mathbf{x}) в момент t равна

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} dx^i.$$

Ввиду того что в момент t лагранжевы координаты x^i являются криволинейными неортогональными и следящими во времени за физическими частицами, они приводят к довольно сложным выражениям и уравнениям для тензоров напряжений и деформаций, но вместе с тем дают исчерпывающую информацию о поведении связанных с фиксированными частицами геометрических параметров.

Поэтому тензоры деформаций и напряжений, к которым относится постулат макроскопической определимости, должны отображать только эволюцию во времени метрики лагранжевой координатной системы и соответственно тривектора напряжений, отнесенного к этой системе. Лагранжева система координат, выбираемая в момент $t=t_0$, конечно, произвольна и взаимно однозначно связана с системой (x^1, x^2, x^3) .

Метод Эйлера. Рассмотрим движение среды в любой момент времени t относительно фиксированной декартовой ортогональной системы координат и обозначим теперь через \mathbf{x} радиус-вектор фиксированной точки этого пространства. В различные моменты времени в точке \mathbf{x} находятся различные физические частицы среды — вещество «протекает» в этом пространстве. Вместо того чтобы по методу Лагранжа следить за параметрами движения фиксированной физической частицы, будем следить за тем, с какими параметрами различные физические частицы в разные моменты времени

проходят через точку x пространства. Таким образом, можно построить поле интересующих нас параметров в неподвижном пространстве x . Это пространство с построенным в нем полем параметров движения, в первую очередь — с полем вектора скорости v физических частиц, называется эйлеровым. Каждая физическая частица $x = \text{const}$ со временем «прочерчивает» в нем свою траекторию, причем уравнение этой траектории будет иметь вид (3.22).

Частица, находящаяся в момент t в точке x , имеет скорость $v(x, t)$, и потому ее координата в момент $t + dt$ будет $x + vdt$, так как ее бесконечно малый вектор перемещения за время dt будет vdt . Таким образом, в каждый момент времени t для исследования движения всей среды за малый интервал dt можно принять метод Лагранжа, если x считать начальной координатой частицы (в момент t), а $u'(x, t) = vdt$ применять в качестве вектора перемещения этой частицы. Отсюда происходит совпадение теории малых перемещений и деформаций по методу Лагранжа и теории бесконечно малых деформаций, т. е. скоростей деформаций в эйлеровом пространстве.

Движение среды в эйлеровом пространстве может оказаться стационарным, т. е. поле параметров движения (скорость, плотность и др.) не зависящим от времени. Таковы случаи установившегося обтекания тел газом, жидкостью, твердой средой. При этом все частицы, проходящие через точку x , описывают одну и ту же неизменную траекторию, называемую *линией тока*, и потому поток вещества образует поле «застывших» в эйлеровом пространстве линий тока.

Оба метода изучения движения сплошной среды являются вполне строгими и адекватными. Если, следуя методу Лагранжа, мы нашли вектор перемещения физических частиц $u(x, t)$, а значит, и $x(x, t) = x + u(x, t)$, то поле вектора скорости в эйлеровом пространстве $v(x, t)$ найдем по формулам (3.23) — (3.25). Пользуясь обратной функцией вида (3.23), найдем поле и других параметров движения как функции от x и t , т. е. построим их в эйлеровом пространстве.

Если же, напротив, нам известно движение среды в эйлеровом пространстве, в частности известно поле вектора $v(x, t)$, то можно, хотя и не так просто, найти вектор перемещения физической частицы как функцию времени и ее начальной координаты x . Для этого заметим, что в эйлеровом пространстве вдоль неизвестной нам траектории движения какой-нибудь частицы, т. е. на линии

$$x = x(t), \quad x = \text{const},$$

за время dt координата частицы изменяется на величину dx , равную бесконечно малому перемещению vdt , и потому получаем (3.2). Так как вектор $v(x, t)$ предполагается известным, то (3.2) представляет собой одно обыкновенное дифференциальное уравне-

ние относительно вектора x , иначе говоря, три скалярных уравнения

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, x^2, x^3, t) \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.27)$$

Эти уравнения имеют три интеграла, зависящие от трех произвольных постоянных:

$$x^i = f^i(C^1, C^2, C^3, t) \quad (i=1, 2, 3).$$

Удовлетворяя начальным условиям

$$t=t_0, \quad x^i=x^i, \quad (3.28)$$

найдем выражения постоянных C^i через x^1, x^2, x^3 , т. е. придем к решению в виде (3.22). А это значит, что мы найдем движение среды в лагранжевых координатах. Возникающие при этом трудности связаны с интегрированием системы (3.27).

Если в эйлеровом пространстве дано поле вектора скорости $v(x, t)$, то в каждый момент времени t можно построить *линии тока*. Линия тока в момент t есть «траектория вектора скорости» $v(x, t)$, проходящая через какую-нибудь точку x_0 . Пусть $x = x(\lambda)$ — уравнение линии тока в параметрическом виде (λ — параметр). По определению вектор $dx = \frac{dx}{d\lambda} d\lambda$ на линии тока коллинеарен вектору $v(x, t)$, т. е. уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3}, \quad (3.29)$$

причем $v^i = v^i(x^1, x^2, x^3, t)$, где t постоянно. Сравнивая (3.27) и (3.29), видим, что линии тока совпадают с траекториями частиц только в том случае, если движение является установившимся (т. е. вектор скорости v в эйлеровом пространстве не зависит от t).

Если определено поле скалярной или векторной величины \mathcal{F} в эйлеровом пространстве, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, t)$, то частная производная $\partial \mathcal{F}(x, t) / \partial t$ даст скорость изменения \mathcal{F} в фиксированной геометрической точке пространства x . Скорость же изменения \mathcal{F} для физической частицы, в момент t находящейся в точке x , определяется *субстанциональной* (полной) производной по времени:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt},$$

где dx/dt определяется из (3.2), т. е.

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + v^i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i}. \quad (3.30)$$

В случае установившегося движения имеем $d\mathcal{F}/dt = v^i \partial \mathcal{F} / \partial x^i$. Второе слагаемое в (3.30) называют *конвективной* производной.

Если $\mathcal{F}(x, t)$ — скаляр или вектор, определенный для частицы $x = \text{const}$, и если на основании (3.23) мы выразим \mathcal{F} как функцию (x, t) , то для одной и той же частицы производная (3.30) будет равна частной производной $\dot{\mathcal{F}} = \partial \mathcal{F} / \partial t$. Но если \mathcal{F} — тензор, например, напряжений, то (3.30) будет отличаться от $\dot{\mathcal{F}}$ вследствие деформации и вращения частицы. Вопрос представления операторов над $\mathcal{F}(x, t)$ по t в эйлеровом пространстве будет рассматриваться позже.

§ 4. ДЕФОРМАЦИЯ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Деформацию сплошной среды будем считать известной (по определению), если для любой фиксированной ее точки с начальной координатой $x = \text{const}$ (называемой физической или материальной точкой) в любой момент времени $t \geq t_0$ известна деформация всех бесконечно малых физических элементов, взятых в окрестности этой точки. Такими элементами могут быть бесконечно малые отрезки линий (волокна), площадки поверхностей, объемы с различными формами ограничивающих поверхностей, состоящие из одних и тех же материальных точек при любом t . Из геометрических соображений ясно, что деформация окрестности точки x будет вполне определена, если известна деформация любого бесконечно малого вектора — волокна $dx = \xi$, взятого в точке x .

В некоторой неподвижной точке O евклидова пространства наблюдателя нами выбран неподвижный ортонормированный репер e_i ($i=1, 2, 3$), в котором при $t=t_0$ радиус-вектор $x = x^i e_i$ с его декартовыми координатами $x^i = \text{const}$ регистрирует физическую точку. Радиус-вектор $x = x^i e_i = \text{const}$ с декартовыми координатами x^i определяет неподвижную точку пространства наблюдателя (эйлерова пространства), через которую с течением времени t проходят различные физические точки. Квадрат длины фиксированного физического волокна $dx = \xi$ при $t=t_0$ равен

$$(dx)^2 = e_i e_j dx^i dx^j = \overset{0}{g}_{ij} dx^i dx^j = \overset{0}{g}_{ij} \xi^i \xi^j = \sum_1^3 (dx^i)^2 \quad (4.1)$$

и, следовательно, начальный метрический тензор $\overset{0}{g}_{ij} = e_i e_j$ лагранжевой системы координат x^i равен тензору δ_{ij} Кронекера

$$\overset{0}{g}_{ij} = \delta_{ij}. \quad (4.2)$$

Квадрат длины любого малого элемента dx пространства наблюдателя имеет такое же выражение:

$$(dx)^2 = g_{ij}^0 dx^i dx^j = \sum_1^3 (dx^i)^2, \quad (4.3)$$

Но для каждого t можно найти среди точек x и векторов-отрезков dx в них такие, что в точке x будет находиться интересующая нас фиксированная физическая точка x , а $dx = \rho$ будет представлять деформированный в момент t вектор-отрезок $\xi = dx$. Для этого необходимо использовать соответствие между текущими и начальными координатами одних и тех же физических точек, которое устанавливает закон движения сплошной среды (3.22) для различных моментов времени t .

Формально закон движения среды в евклидовом пространстве (3.22), (3.23) представляет взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое преобразование множества точек, заключенного в объеме V_0 и ограниченного поверхностью Σ_0 (V_0 — начальный объем, Σ_0 — граница среды) во множество точек x , заключенное в объеме V с границей Σ ; время t является параметром преобразования. При этом окрестность каждой точки x аффинно преобразуется в окрестность соответствующей точки x . Теория деформаций, следовательно, опирается на дифференциальную геометрию, соответствующую преобразованиям координат (3.22), (3.23).

В точке x в момент t можно построить репер e_i (путем параллельного переноса из начала O системы координат) и в нем изобразить векторы $\xi = \xi^i e_i$, $\rho = \rho^i e_i$.

Согласно закону движения физическая точка x в момент t находится в точке пространства $x = x(x, t)$, соседняя физическая точка $x' = x + \xi$, $dx = \xi$ находится в точке $x' = x(x + \xi, t)$, и потому вектор-волокно $dx = \xi$ преобразуется в вектор-волокно $\rho = x' - x$,

$$\rho = x(x + \xi, t) - x(x, t) = \frac{\partial x}{\partial x^i} \xi^i = \frac{\partial x}{\partial x} \xi, \quad (4.4)$$

причем бесконечно малые высшего порядка $O(\xi^2)$ отброшены. Как видим, в выражение (4.4) входят три вектора $\partial x / \partial x^i$ и оператор $\partial x / \partial x$, называемый аффинором преобразования окрестности физической точки $x = \text{const}$,

$$\vartheta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tilde{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}. \quad (4.5)$$

Тогда преобразование (4.4) волокна ξ в волокно ρ через их декартовы координаты ξ^i , ρ^i представится линейными соотношениями

$$\rho \equiv \begin{pmatrix} \rho^1 \\ \rho^2 \\ \rho^3 \end{pmatrix}, \quad \rho = \tilde{A} \xi = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Здесь использованы также матричные представления векторов ρ , ξ в виде матриц-столбцов и указана квадратная матрица аффинора \tilde{A} . Из (4.6):

$$\rho^i = A_j^i \xi^j, \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.7)$$

В соответствии с законом движения (3.22), (3.23) \tilde{A} имеет обратную матрицу:

$$\tilde{A}^{-1} = \tilde{B} = \frac{\partial \mathbf{x}(x, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \tilde{A} \tilde{B} = \tilde{B} \tilde{A} = I. \quad (4.8')$$

Транспонирование матрицы отмечаем верхним индексом T у соответствующего вектора или аффинора. Например, ξ^T есть вектор ξ , представляемый матрицей-строкой, \tilde{A}^T есть аффинор, представленный транспонированной матрицей аффинора \tilde{A} .

Поскольку ξ — любое волокно в точке \mathbf{x} , причем \tilde{A} не зависит от ξ , то (4.6) представляет аффинное преобразование окрестности точки \mathbf{x} в ее окрестность в момент времени t . Соотношения (4.8') дают

$$B_i^k A_j^i = B_i^k A_j^i = \delta_j^k = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3). \quad (4.8)$$

Непосредственно из закона движения (3.23) находим

$$\xi = \mathbf{x}(\mathbf{x} + \rho, t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \rho = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \rho^i, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \quad \tilde{B} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \xi = \tilde{B} \rho,$$

откуда следует

$$\xi^i = B_j^i \rho^j, \quad B_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (4.10)$$

Как видим, аффиноры \tilde{A} и \tilde{B} определяются соответственно тройкой векторов $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{x} / \partial x^i$ и тройкой векторов $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{x} / \partial x^i$. Как следует из (4.6), (4.9), транспонированные матрицы A^T , B^T имеют вид

$$\|\tilde{A}^T\| = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{B}^T\| = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_1^2 & B_1^3 \\ B_2^1 & B_2^2 & B_2^3 \\ B_3^1 & B_3^2 & B_3^3 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Произведение определителей $A = |A^T|$ и $B = |B^T|$ этих матриц, как и матриц \tilde{A} , \tilde{B} , равно единице на основании (4.8):

$$AB = |A_j^i| |B_i^k| = |A_j^i B_i^k| = 1. \quad (4.12)$$

Из (4.6), (4.7) следуют все свойства аффинных преобразований окрестности точки x , в частности:

1. Частицы, при $t = t_0$ лежащие на прямой, остаются на прямой и после деформации. Например, прямолинейное волокно $(\xi)_1 = \xi^1 e_1$, параллельное оси x_1 , перейдет в прямолинейное волокно

$$(\rho)_1 = \tilde{A} \xi^1 e_1 = \xi^1 \tilde{A} e_1 = \xi^1 (A_1^1 e_1 + A_1^2 e_2 + A_1^3 e_3) = \xi^1 \vartheta_1, \quad (4.13')$$

так как $A_1^i e_i = \vartheta_1$ постоянный (при данном t не зависящий от ξ) вектор.

2. Плоскость переходит в плоскость. Например, плоскость $\xi^1 = \text{const} = C_1$ переходит в плоскость, согласно (4.10) имеющую уравнение

$$B_i^1 \rho^i = C_1, \quad (4.13'')$$

а параллельная $\xi^1 = C_1$ плоскость $\xi^1 = C_1'$ — в плоскость $B_i^1 \rho^i = C_1'$, параллельную указанной.

3. Так как параллельность линий и плоскостей сохраняется, то прямоугольные параллелепипеды переходят в косоугольные параллелепипеды (при любом $t > t_0$).

4. Множество частиц, расположенных при $t = t_0$ на сфере $\xi^2 = C^2$, переходит в множество тех же частиц, расположенных на поверхности эллипсоида, определяемого уравнением

$$\sum_{\alpha=1}^3 B_i^\alpha B_j^\alpha \rho^i \rho^j = C^2. \quad (4.13''')$$

Обратное преобразование $\xi = \tilde{B} \rho$ отвечает на вопрос, каковы начальные физические элементы среды (при $t = t_0$), соответствующие элементам, произвольно выбранным в момент t в точке x пространства наблюдателя. Так, векторы

$$(\rho)_1 = \vartheta_1 dx^1, \quad (\rho)_2 = \vartheta_2 dx^2, \quad (\rho)_3 = \vartheta_3 dx^3$$

в точке x в момент t представляют соответственно те волокна, которые в точке x при $t = t_0$ были координатными, т. е.

$$(\xi)_1 = e_1 dx^1, \quad (\xi)_2 = e_2 dx^2, \quad (\xi)_3 = e_3 dx^3.$$

Действительно, если, например, вектор-волокно $(\xi)_1 = \xi^1 e_1$ имеет координаты $\xi^1 > 0$, $\xi^2 = \xi^3 = 0$, то соответствующее ему по закону (4.4) будет

$$(\rho)_1 = \vartheta_1 \xi^1 = (A_1^1 e_1 + A_1^2 e_2 + A_1^3 e_3) \xi^1,$$

причем длина его $|(\rho)_1| = \xi^1 \sqrt{\partial_1 \partial_1} = \xi^1 |\partial_1|$, т. е. скаляр $g_{11} = \partial_1 \partial_1$ является коэффициентом изменения длины ξ^1 (метрическим коэффициентом).

Перечисленные и другие простые следствия непрерывной дифференцируемости закона движения $x = \varphi(x, t)$ при внимательном их анализе оказываются очень полными и содержательными для исследования физических свойств, термодинамики и уравнений состояния тела. Выбранная в начальный момент $t = t_0$ в лагранжевых координатах частица, скажем, в виде кубика фиксированных малых размеров, движется и деформируется так: «стенки» кубика остаются плоскими «непроницаемыми» для внутренних частиц, относительное движение которых однородно (аффинно) и полностью определяется удлинением ребер и изменениями относительных углов наклона граней косоугольного параллелепипеда, в форме которого кубик пребывает в любой момент $t > t_0$. Следовательно, содержимое частицы представляет как бы замкнутую равновесную систему в смысле статистической механики (гл. I). Состояние такой системы зависит от внешних параметров и температуры, т. е. от положения и движения границ частицы, т. е. от эволюции во времени векторов лагранжева репера $\partial_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) или эволюции аффинора $\tilde{A}(t)$. Но ясно, что $\partial_i(t)$ и $\tilde{A}(t)$, кроме собственно деформации частицы (параллелепипеда), включают и переносное движение, что собственно деформация определяется метрическим тензором лагранжева репера $\partial_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) с симметричной квадратной матрицей

$$\tilde{\mathcal{G}} = A^T \tilde{A} = \|g_{ij}\|, \quad g_{ij} = \partial_i \partial_j.$$

Квадрат длины любого волокна, которое при $t = t_0$ определяется вектором ξ , согласно (4.4), (4.6) равен

$$(dx)^2 = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.14)$$

или, иначе,

$$\rho^2 = \rho^T \rho = \xi^T \tilde{A}^T \tilde{A} \xi = \xi^T \tilde{\mathcal{G}} \xi = g_{ij} \xi^i \xi^j.$$

Скалярные произведения векторов $\partial_i \partial_j$ ($i, j, m = 1, 2, 3$) и симметричная матрица $\tilde{A}^T \tilde{A}$

$$g_{ij} = g_{ji} = \partial_i \partial_j = A_i^m A_j^m, \quad \tilde{\mathcal{G}} = \tilde{A}^T \tilde{A} = \|g_{ij}\| = \text{met } x(x, t) \quad (4.15)$$

образуют так называемый ковариантный метрический тензор $\tilde{\mathcal{G}}$, так как он в момент t определяет изменение длины любого волокна ξ , взятого при $t = t_0$ в точке x ; этот тензор симметричен. В силу начальных условий, которым удовлетворяет закон движения:

$$x = x(x, t), \quad t = t_0, \quad x = x, \quad (4.16)$$

$$x' = x'(x^1, x^2, x^3, t), \quad t = t_0, \quad x' = x',$$

метрический тензор g_{ij} при $t = t_0$ равен

$$(g_{ij})_{t=t_0} = g_{ij}^0 = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j} = e_i e_j = \delta_{ij}. \quad (4.16')$$

Заметим, что совокупность величин g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) действительно представляет тензор второго ранга, так как в соотношении (4.14) слева — скаляр, справа же — квадратичная форма по ξ^i , причем ξ — вектор*.

Разность $\rho^2 - \xi^2$ однозначно определяет изменение длины волокна ξ в момент t , причем согласно (4.1), (4.14) она равна

$$\rho^2 - \xi^2 = (g_{ij} - g_{ij}^0) \xi^i \xi^j = (g_{ij} - \delta_{ij}) \xi^i \xi^j, \quad (4.17)$$

и, следовательно, совокупность величин

$$e_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - \delta_{ij}) \quad (4.18)$$

представляет тензор $\tilde{\mathcal{E}}$, называемый *тензором деформации Коши—Лагранжа*. Он симметричен, равен нулю (т. е. все его компоненты равны нулю) при $t = t_0$:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} - I), \quad \tilde{\mathcal{E}} = \|\mathbf{e}_{ij}\|. \quad (4.18')$$

Обратим внимание на то, что квадратичные формы (4.1), (4.14) и вытекающая из (4.17) форма

$$\rho^2 - \xi^2 = 2e_{ij} \xi^i \xi^j = 2e_{ij} dx^i dx^j \quad (4.19)$$

записаны в лагранжевых координатах и потому компоненты метрических тензоров g_{ij}^0 , g_{ij} и тензора деформации e_{ij} представляют тензоры \mathcal{E} и $\tilde{\mathcal{E}}$ в этих же координатах.

В точке x в момент t векторы \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) образуют косоугольный базис, или репер, в который преобразуется репер \mathbf{e}_i . Если с базисом \mathbf{e}_i связать декартову систему координат, то она будет косоугольной. Три вектора $\mathbf{e}_i = \partial x / \partial x^i$ в точке $x(x, t)$ будем называть *лагранжевым ковариантным* (индекс i внизу) базисом.

Для определения деформаций физических объемов и площадей удобными являются векторы *контравариантного базиса* \mathbf{e}^i и кон-

* Коэффициенты инвариантной относительно преобразования системы координат квадратичной формы по компонентам вектора образуют симметричный тензор (по одному из определений тензора)

травариантные компоненты метрического тензора g^{ij} , однозначно связанные с ∂_i и g_{ij} соотношениями

$$\partial' g_{ij} = \partial_j; \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (4.20)$$

из которых следуют

$$\partial^\alpha \partial_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \partial^\alpha = \partial_i g^{\alpha i}, \quad g^{ij} = \partial' \partial^j = B_m^i B_m^j. \quad (4.20')$$

Следовательно, ∂^i , g^{ij} находятся по известным формулам через основной определитель $g = |\mathcal{G}|$

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \partial_{i/k} g_{1i} g_{2j} g_{3k}^* \quad (4.21)$$

и его миноры; обратный определитель $g^{-1} = |g^{ij}| = 1/g$, что находится из равенства

$$g \cdot g^{-1} = |g_{ij}| |g^{kl}| = |g_{ij} g^{kl}| = |\delta_i^k| = 1.$$

Контравариантный вектор ∂^α равен

$$\partial^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\beta \times \partial_\gamma, \quad (4.22)$$

где числа (α, β, γ) образуют четную (круговую) подстановку индексов $(1, 2, 3)$; компоненты g^{ij} имеют выражения через g_{ij} , вытекающие из (4.20), (4.21), а также непосредственно из векторного тождества $(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (bc)(ad)$, определения $g^{ij} = \partial^i \partial^j$ и (4.22):

$$g g^{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} g_{\gamma\gamma} - g_{\beta\gamma}^2, \quad g g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\gamma}, \quad (4.23)$$

$$g g^{ij} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}, \quad g^{ij} = \frac{\partial \ln g}{\partial g_{ij}}.$$

Начальная координатная физическая площадка-прямоугольник, образованный координатными волокнами $(\xi)_\alpha = \xi^\alpha e_\alpha$ и $(\xi)_\beta = \xi^\beta e_\beta$, представляется вектором

$$d\overset{0}{\Sigma}^\gamma = (\xi)_\alpha \times (\xi)_\beta = d\overset{0}{\Sigma}^\gamma e_\alpha \times e_\beta = d\overset{0}{\Sigma}^\gamma e_\gamma, \quad d\overset{0}{\Sigma}^\gamma = dx^\alpha dx^\beta. \quad (4.24)$$

К моменту t площадка $d\overset{0}{\Sigma}^\gamma$ преобразуется в площадку $d\Sigma^\gamma$ параллелограмма, образованного векторами $(\rho)_\alpha = \xi^\alpha \partial_\alpha$, $(\rho)_\beta = \xi^\beta \partial_\beta$, представляемую вектором

* Элемент ε_{ijk} равен единице для четной подстановки $(1, 2, 3)$, минус единице для нечетной и нулю для двух или трех равных индексов.

$$d\Sigma^\gamma = (\rho)_\alpha \times (\rho)_\beta = d\Sigma^0_\gamma \partial_\alpha \times \partial_\beta$$

или на основании (4.22) — вектором

$$d\Sigma^\gamma \equiv d\Sigma^\gamma (\mathbf{v})_\gamma = \sqrt{g} d\Sigma^0_\gamma \partial^\gamma, \quad (4.25)$$

где вектор единичной нормали к этой площадке $(\mathbf{v})_\gamma$ равен

$$(\mathbf{v})_\gamma = \frac{\partial^\gamma}{|\partial^\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{g^{\gamma\gamma}}} \partial^\gamma. \quad (4.26)$$

Следовательно, величина площадки $d\Sigma^0_\gamma$ в результате деформации станет равной

$$d\Sigma^\gamma = \sqrt{g g^{\gamma\gamma}} d\Sigma^0_\gamma, \quad (\gamma = 1, 2, 3). \quad (4.27)$$

Зная закон изменения координатных площадок, найдем его и для произвольной начальной наклонной (косой) площадки $d\Sigma^0_\gamma$, проведенной при $t=t_0$ в точке x и имеющей заданную единичную нормаль \mathbf{v} . Для этого рассмотрим координатный тетраэдр, построенный на векторах $(\xi)_1, (\xi)_2, (\xi)_3$ так, что площади его треугольных координатных граней представляются векторами

$$\frac{1}{2} d\Sigma^0_1, \quad \frac{1}{2} d\Sigma^0_2, \quad \frac{1}{2} d\Sigma^0_3,$$

а наклонной грани — вектором

$$\frac{1}{2} d\Sigma^0_\gamma = \frac{1}{2} d\Sigma^0_0 \mathbf{v}. \quad (4.28)$$

Поскольку поверхность фигуры замкнута, то суммарная вектор-площадь поверхности равна нулю:

$$d\Sigma^0_\gamma + \sum_{\alpha=1}^3 d\Sigma^0_\alpha = 0,$$

если все вектор-нормали этих площадок внешние (или все внутренние). Но для площадок $d\Sigma^0_\alpha$ нормали отрицательны ($-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$), и потому на основании (4.28), (4.24) получаем

$$d\Sigma^0_\gamma \equiv d\Sigma^0_\gamma \mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 d\Sigma^0_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad d\Sigma^0_\gamma = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (d\Sigma^0_\alpha)^2}. \quad (4.29)$$

Отсюда, умножая на e_β , находим связь между размерами начальных площадок:

$$d\Sigma^\beta = d\Sigma^\alpha v_\alpha^\beta, \quad v_\beta^\alpha = v e_\beta^\alpha \quad (\beta=1, 2, 3). \quad (4.30)$$

В результате деформации векторы $(\xi)_i$ превратятся в $(\rho)_i$, площадки $d\Sigma^\alpha$ — в $d\Sigma^\alpha$, площадка $d\Sigma^\nu$ — в $d\Sigma^\nu = d\Sigma^\nu v$, где v — единичная нормаль; тетраэдр преобразуется в косоугольный тетраэдр, для которого из соотношений замкнутости его поверхности на основании (4.25), (4.29) получим

$$d\Sigma^\nu = d\Sigma^\nu v = \sum_{\alpha=1}^3 d\Sigma^\alpha = \sqrt{g} \sum_{\alpha=1}^3 d\Sigma^\alpha \partial^\alpha, \quad (4.31)$$

$$d\Sigma^\nu = \sqrt{g g^{ij} d\Sigma^i d\Sigma^j}.$$

Это векторное уравнение определяет и единичную нормаль $v = d\Sigma^\nu / d\Sigma^\nu$, и размер косоугольной площадки $d\Sigma^\nu$, в которую преобразуется площадка $d\Sigma^\nu$. Умножая (4.31) на ∂_β и используя (4.20') и (4.27), найдем выражение величины деформированной площадки $d\Sigma^\beta$ через $d\Sigma^\nu$:

$$d\Sigma^\beta = \sqrt{g g^{\beta\beta}} d\Sigma^\beta = \sqrt{g^{\beta\beta}} d\Sigma^\nu v_\beta, \quad (4.32)$$

$$v_\beta = v \partial_\beta, \quad v = v_i \partial^i = v^i \partial_i.$$

Здесь v_β — ковариантная компонента вектора единичной нормали v .

Объем начального прямоугольного координатного параллелепипеда, построенного на векторах $(\xi)_1$, $(\xi)_2$, $(\xi)_3$, равен

$$dV_0 = (\xi)_\alpha (\xi)_\beta \times (\xi)_\gamma = \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma e_\alpha e_\beta \times e_\gamma = \xi^1 \xi^2 \xi^3 = dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4.33)$$

Объем этого же параллелепипеда, после деформации (т. е. в момент t) ставшего косоугольным, образуется векторами $(\rho)_\alpha = \partial_\alpha \xi^\alpha$ и, следовательно, равен

$$dV = (\rho)_\alpha (\rho)_\beta \times (\rho)_\gamma = dV_0 \partial_\alpha \partial_\beta \times \partial_\gamma,$$

или на основании (4.20'), (4.22)

$$dV = dV_0 \sqrt{g}. \quad (4.34)$$

По свойству аффинного преобразования это равенство верно не только для деформации координатного параллелепипеда, но и для любого малого объема, состоящего на всем интервале времени $t=t_0$ из одних и тех же физических частиц.

Масса частиц в объеме, изменяющемся со временем по закону (4.34), при фиксированных лагранжевых координатах x остается неизменной, и потому закон сохранения массы

$$dm = \rho dV = \rho_0 dV_0,$$

где ρ_0 , ρ — плотности частицы x в моменты t_0 и t , в лагранжевых координатах принимает вид

$$\rho \sqrt{g} = \rho_0. \quad (4.35)$$

Геометрический и физический смысл компонент метрического тензора $\tilde{\mathcal{G}}$ и тензора деформации $\tilde{\mathcal{E}}$ выясняется из соотношений (4.14), (4.18) и (4.19). Относительным удлинением e_i и кратностью λ_i любого начального волокна ξ называются величины

$$e_i = \frac{|\rho| - |\xi|}{|\xi|} = \lambda_i - 1, \quad \lambda_i = \frac{|\rho|}{|\xi|}. \quad (4.36)$$

Обозначим направляющие косинусы вектор-волокна ξ через $\overset{0}{l}^i$ и перепишем (4.19) в виде

$$\overset{0}{l}^i = \frac{\xi^i}{|\xi|}, \quad \frac{\rho^2}{\xi^2} = 1 + 2e_{ij} \overset{0}{l}^i \overset{0}{l}^j = g_{ij} \overset{0}{l}^i \overset{0}{l}^j \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.37)$$

учитывая, что

$$\overset{0}{l}^i \overset{0}{l}^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 \overset{0}{l}^{i^2} = 1.$$

Пусть волокно ξ совпадает с координатным $(\xi)_\alpha = \xi^\alpha e_\alpha$, так что $\overset{0}{l}^\alpha = 1$, $\overset{0}{l}^\beta = \overset{0}{l}^\gamma = 0$; обозначим его удлинение e_α , кратность λ_α и найдем из (4.37)

$$\rho^2/\xi^2 = 1 + 2e_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha},$$

после чего из (4.36)

$$\lambda_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad e_\alpha = \sqrt{1 + 2e_{\alpha\alpha}} - 1 = \lambda_\alpha - 1 \quad (\alpha=1, 2, 3). \quad (4.38)$$

Следовательно, диагональные элементы матриц тензоров $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ однозначно определяют относительные удлинения координатных волокон $(\xi)_\alpha$ и кратности изменения их длин:

$$e_\alpha = \frac{|(\rho)_\alpha| - |(\xi)_\alpha|}{|(\xi)_\alpha|}, \quad \lambda_\alpha = \frac{|(\rho)_\alpha|}{|(\xi)_\alpha|} = 1 + e_\alpha. \quad (4.39)$$

Рассмотрим теперь два вектор-волокна ξ_1 и ξ_2 с направляющими косинусами

$$l_1^0 = \frac{\xi_1^i}{|\xi_1|}; \quad l_2^0 = \frac{\xi_2^i}{|\xi_2|}, \quad i=1, 2, 3. \quad (4.40)$$

Косинус угла θ_{12}^0 между ними равен

$$\cos \theta_{12}^0 = \frac{\xi_1 \xi_2}{|\xi_1| |\xi_2|} = \sum_{i=1}^3 l_1^0 l_2^0. \quad (4.41)$$

Эти вектор-волокна после деформации согласно (4.6) преобразуются в вектор-волокна

$$\rho_1 = \tilde{A} \xi_1, \quad \rho_2 = \tilde{A} \xi_2$$

с компонентами

$$\rho_1^i = A_j^i \xi_1^j, \quad \rho_2^i = A_j^i \xi_2^j$$

и направляющими косинусами

$$l_1^i = \frac{\rho_1^i}{|\rho_1|}, \quad l_2^i = \frac{\rho_2^i}{|\rho_2|}, \quad i=1, 2, 3.$$

Но из (4.36) $|\rho_1|$, $|\rho_2|$ выражаются через относительные удлинения этих волокон e_1 , e_2 формулами

$$|\rho_1| = (1 + e_1) |\xi_1|, \quad |\rho_2| = (1 + e_2) |\xi_2|,$$

и потому с учетом (4.37) получим

$$l_1^i = \frac{A_j^i \xi_1^j}{|\rho_1|} = \frac{A_j^i l_1^j}{(1 + e_1)}, \quad (4.42)$$

Причем l_2^i получается заменой индекса 1 на 2. Косинус угла θ_{12} между деформированными волокнами ρ_1 , ρ_2 будет равен

$$\cos \theta_{12} = \sum_{i=1}^3 l_1^i l_2^i = \sum_{(m,n,i)=1}^3 \frac{A_m^i A_n^i l_1^m l_2^n}{(1 + e_1) (1 + e_2)},$$

или, на основании соотношений (4.15), (4.18) и (4.41),

$$\cos \theta_{12} = \frac{g_{mn} l_1^m l_2^n}{(1 + e_1) (1 + e_2)} = \frac{\cos \theta_{12}^0 + 2e_{mn} l_1^m l_2^n}{(1 + e_1) (1 + e_2)}. \quad (4.43)$$

Выберем теперь в качестве начальных волокон ξ_1, ξ_2 координатные $(\xi)_\alpha = \xi^\alpha e_\alpha$ и $(\xi)_\beta = \xi^\beta e_\beta$; для них $\cos \theta_{\alpha\beta} = 0$ и отличны от нуля только $l_\alpha^\alpha = 1$ и $l_\beta^\beta = 1$; из (4.43) получаем

$$\cos \theta_{\alpha\beta} = \frac{2e_{\alpha\beta}}{(1+e_\alpha)(1+e_\beta)} = \frac{2e_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}}. \quad (4.44)$$

Итак, компоненты тензора деформации $e_{\alpha\beta}$ со смешанными индексами пропорциональны косинусам углов между волокнами $(\rho)_\alpha, (\rho)_\beta$, которые до деформации были ортогональными координатными.

В теории деформаций представляют интерес еще углы поворота различных волокон. Единичный вектор $\rho/|\rho|$ равен

$$\frac{\rho}{|\rho|} = l^i e_i = \frac{\rho^i e_i}{|\xi|(1+e_\xi)} = \frac{A_{j/i}^{i0}}{1+e_\xi} e_i,$$

где l^i — направляющие косинусы волокна ξ до деформации ($\xi = |\xi| l^i e_i$). Следовательно, направляющие косинусы этого волокна после деформации равны

$$l^i = \frac{A_{j/i}^{i0}}{1+e_\xi}. \quad (4.45)$$

В частности, для координатного волокна $(\xi)_\alpha = \xi^\alpha e_\alpha$ имеем $l_\alpha^\alpha = 1$, $l_\alpha^\beta = 0$ и потому

$$l_\alpha^\alpha = \frac{A_\alpha^\alpha}{1+e_\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} A_\alpha^\alpha. \quad (4.46)$$

Деформация среды называется малой порядка $\delta \ll 1$, если для любых i, j в любой точке x в момент t

$$|e_{ij}| \leq \delta$$

и величиной δ^2 можно пренебречь сравнительно с δ . В таком случае из (4.38), (4.44) находим

$$e_{\alpha\alpha} = e_\alpha, \quad 2e_{\alpha\beta} = \cos \theta_{\alpha\beta} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta} \right) = \frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, при малых деформациях компонента $e_{\alpha\alpha}$ равна относительному удлинению координатного волокна $(\xi)_\alpha$, а удвоенная компонента $2e_{\alpha\beta}$ равна уменьшению прямого угла между $(\xi)_\alpha$ и $(\xi)_\beta$.

Теперь все элементы деформации окрестности любой начальной физической точки x в момент t выражены через аффинор \tilde{A} и метрический тензор $\tilde{\mathcal{G}}$ или тензор деформации $\tilde{\mathcal{E}}$. В дальнейшем необходимо учитывать выражения тензоров \tilde{A} , $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ либо через текущий радиус-вектор $x(x, t)$, либо через вектор перемещения $u(x, t) = x - x$, все эти функции при движении среды являются искомыми, и для них будут составляться разрешающие уравнения.

Выражения компонент тензора деформации через радиус-вектор $x(x, t)$ и вектор перемещения $u(x, t)$.

Векторы x и $u = x - x$ в этом параграфе мы рассматриваем только в декартовых ортогональных координатах (в неподвижном репере e_i). По индексам $(i, j, k, m, n = 1, 2, 3)$, повторяющимся как сверху, так и снизу, сохраняем правило суммирования и по-прежнему обозначаем греческими буквами $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$ индексы, по которым суммирование не производится.

Компоненты аффинора \tilde{A} согласно (4.9) имеют выражения

$$A_i^m = \delta_i^m + \frac{\partial u^m}{\partial x^i}. \quad (4.47)$$

Компоненты метрического тензора $\tilde{\mathcal{G}}$ согласно (4.15)

$$g_{ij} = A_i^m A_j^m = \delta_{ij} + 2e_{ij} \quad (4.48)$$

и, следовательно, компоненты тензора деформаций

$$2e_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u^m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j}. \quad (4.49)$$

Тензоры $\tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ представляются матрицами $\|g_{ij}\|$, $\|e_{ij}\|$, причем им соответствуют симметричные квадратичные формы (4.14), (4.19), а значит, и центральные поверхности второго порядка

$$2\Phi_g = g_{ij}X^iX^j = \text{const}, \quad 2\Phi_e = e_{ij}X^iX^j = \text{const}, \quad (4.50)$$

где $X(X^i)$ — вектор произвольного масштаба, отложенный вдоль волокна ξ в точке x . Поскольку $g_{\alpha\alpha} = (\varepsilon_\alpha)^2$, то поверхность $2\Phi_g = \text{const}$ — эллипсоид; поверхность $2\Phi_e = \text{const}$ — центральная, и, значит, это эллипсоид или однополостный и двухполостный гиперболоид. Главные оси этих поверхностей совпадают; они называются *главными осями деформации*; главные значения тензоров $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ отличаются на константу. Действительно, главное направление определяется вектором X , коллинеарным градиенту к поверхности. Для $2\Phi_g = \text{const}$ имеем

$$\text{grad } \Phi_g \equiv \frac{\partial \Phi_g}{\partial X^i} e_i \equiv g_{ij}X^j e_i = g_x X \equiv g_x \delta_{ij}X^j e_i, \quad (4.51)$$

откуда для компонент вектора \mathbf{X} и коэффициента g_x , являющегося главным значением, получаем однородную систему уравнений

$$(g_{ij} - g_x \delta_{ij}) X^j = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (4.52)$$

Для поверхности $2\Phi_x = \text{const}$ аналогично получаем

$$\text{grad } \Phi_x \equiv e_{ij} X^j e_i = e_x X \equiv e_x \delta_{ij} X^j e_i, \quad (4.51')$$

$$(e_{ij} - e_x \delta_{ij}) X^j = 0,$$

или на основании (4.18)

$$(g_{ij} - (2e_x + 1) \delta_{ij}) X^j = 0. \quad (4.52')$$

Определители систем (4.52), (4.52') равны нулю:

$$|g_{ij} - g_x \delta_{ij}| = 0, \quad |g_{ij} - (2e_x + 1) \delta_{ij}| = 0, \quad (4.53)$$

откуда находятся одинаковые значения параметров g_x и $2e_x + 1$

$$g_x = 2e_x + 1. \quad (4.54)$$

Значит, уравнения (4.52), (4.52') совпадают и определяют одни и те же главные векторы \mathbf{X} . Развертывая определитель $|g_{ij} - g_x \delta_{ij}|$ по степеням g_x , из (4.53) получим *вековое уравнение*:

$$-g_x^3 + I_{g1} g_x^2 - I_{g2} g_x + I_{g3} = 0. \quad (4.55)$$

Оно имеет три действительных корня g_1, g_2, g_3 , причем *инварианты ортогонального преобразования лагранжевой системы координат* (x_i)

$$I_{g1} = g_{ij} \delta^{ij} = g_{11} + g_{22} + g_{33} = g_1 + g_2 + g_3, \quad (4.56)$$

$$I_{g2} = \frac{1}{2} (I_{g1}^2 - g_{in} g_{jm} \delta^{im} \delta^{jn}) = \frac{1}{2} (I_{g1}^2 - g_{ij} g_{ij}) = g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_3 g_1,$$

$$I_{g3} = |g_{ij}| = g_1 g_2 g_3 = g.$$

Три главных вектора $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ с единичными векторами \mathbf{e}_{i0} ($i=1, 2, 3$), определяемыми тремя системами уравнений (4.52) при $g_x = g_1, g_x = g_2, g_x = g_3$, взаимно ортогональны, и потому путем преобразования поворота системы координат квадратичные формы можно преобразовать к главным осям тензоров $\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}}$. Обозначая через ξ_{i0} ($i=1, 2, 3$) координаты волокна $\tilde{\xi}(\xi^i)$ в главном ортонормированном репере \mathbf{e}_{i0} , получим канонические представления форм (4.14), (4.19):

$$\rho^2 = g_{ij} \xi^i \xi^j = \sum_{i=1}^3 g_i \xi_{i0}^2, \quad (4.57)$$

$$\rho^2 - \xi^2 = 2e_{ij} \xi^i \xi^j = 2 \sum_{i=1}^3 e_i \xi_{i0}^2.$$

Величины g_i , e_i , связанные соотношениями (4.54)

$$e_i = \frac{1}{2} (g_i - 1) \quad (i=1, 2, 3), \quad (4.58)$$

называются *главными компонентами* тензоров $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$, и они для точки $x = \text{const}$ в момент $t = \text{const}$ не зависят от выбора системы координат, т. е. инвариантны относительно преобразований базиса e_i . Из (4.54), (4.56) следует, что

$$\begin{aligned} I_{e1} &= e_{ij} \delta^{ij} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_1 + e_2 + e_3, \\ I_{e2} &= \frac{1}{2} (I_{e1}^2 - e_{ij} e_{ij}) = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1, \\ I_{e3} &= |e_{ij}| = e_1 e_2 e_3 \end{aligned} \quad (4.59)$$

также являются инвариантами ортогональных преобразований базиса e_i . В любой фиксированный момент t в точке $x = \text{const}$ во всех системах координат инварианты имеют одинаковые числовые значения*.

Итак, в любой точке x тела в любой заданный момент времени $t = t_1$ существует главный физический репер-тройка ортогональных физических волокон, который в другой заданный («начальный») момент времени $t = t_0$ состоял из тех же ортогональных волокон. Этому факту соответствует *полярное представление аффинора деформации* A через тензор чистой деформации E и ортогональный тензор O ,

$$E = \sqrt{\tilde{\mathcal{G}}}, \quad O^T O = I \quad (4.60')$$

в виде

$$A = O E, \quad A^T = E O^T. \quad (4.60)$$

Существование преобразования (4.60), ортогональность одного и того же физического репера в два фиксированных момента времени t_1 , t_0 нередко ошибочно трактуются как существование непрерывного процесса вращения физического ортогонального репера во времени. Физические волокна, образующие ортогональный репер в моменты t_0 и t_1 , не ортогональны на интервале $t_0 < t < t_1$. Скорости вращения главных осей деформаций относительно этих

* Явные выражения главных компонент симметричного тензора через его инварианты даны в § 6

осей не совпадают со скоростями вращения физических волокон, направленных по этим осям.

Исключение из отмеченного правила непосредственно вытекает из (4.52), (4.55). Главные векторы \mathbf{X} и главные оси деформаций не будут вращаться относительно вещества, т. е. физический главный репер будет совпадать с репером главных осей деформации в любой момент времени при условии

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, t) = k^2(t) \tilde{\mathcal{G}}'(\mathbf{x}), \quad (4.61)$$

причем $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = k^2(t) g_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x})$ и аффинор $\tilde{A}(\mathbf{x}, t) = k(t) O(\mathbf{x}, t) \times \times \sqrt{\tilde{\mathcal{G}}'(\mathbf{x})}$. Условие (4.61) обеспечивает совпадение с направлениями главных физических волокон не только главных осей деформаций, но и главных осей любого линейного (см. § 9) оператора по времени над тензором деформации.

§ 5. КОНЕЧНЫЕ, МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Уравнения совместности деформаций. Шесть компонент тензора деформаций e_{ij} или метрического тензора $g_{ij} = \delta_{ij} + 2e_{ij}$ в окрестности любой фиксированной физической точки \mathbf{x} среды могут как угодно независимо изменяться с течением времени, т. е. задание шести произвольных функций времени $e_{ij}(\mathbf{x}, t)$ возможно, и деформация окрестности точки при этом будет аффинной. Но если бы мы задали для всех точек среды хотя бы в какой-нибудь момент времени t компоненты e_{ij} или g_{ij} как произвольные непрерывно дифференцируемые функции координат, т. е. произвольно задали бы поле тензора деформации, то деформации оказались бы несовместными, перемещение — неоднозначным, т. е. между соседними частями образовались бы щели или различные физические объемы заняли бы одну и ту же область пространства. Такая возможность исключена благодаря свойству закона движения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, а именно непрерывной взаимно однозначной зависимости между \mathbf{x} и \mathbf{x} для любого t и существованию производных. Компоненты тензора e_{ij} (или g_{ij}) получаются путем дифференцирования вектора $\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$, т. е. шесть скалярных функций e_{ij} выражены через три u_i . Значит, между e_{ij} должны существовать соотношения, полная система которых представляет уравнения совместности деформаций. По существу они должны быть следствием независимости порядка дифференцирования вектора \mathbf{x} типа $\partial_{i,j} = \partial_{j,i}$ *, так как $g_{ij} = \partial_i \partial_j$, а векторы ∂_i выражаются через один вектор: $\partial_i = \mathbf{x}_{,i}$.

* Для краткости дифференцирование любой функции $\psi(\mathbf{x}, t)$ по \mathbf{x}^i обозначаем $\psi_{,i} = \partial\psi/\partial x^i$.

Производные векторов репера \mathfrak{a}_i по координатам могут быть также разложены по векторам базиса \mathfrak{a}_i или \mathfrak{a}^i :

$$\frac{d\mathfrak{a}_i}{dx^j} \equiv \mathfrak{a}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \mathfrak{a}_k = \Gamma_{ij\ k} \mathfrak{a}^k, \quad (5.1)$$

где вследствие симметрии $\mathfrak{a}_{i,j} = \mathfrak{a}_{j,i} = \mathfrak{x}_{,ij}$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij\ l} g^{kl}, \quad (5.2)$$

$$\Gamma_{ij\ l} = \Gamma_{ji\ l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl};$$

Γ — символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода; они симметричны по первым двум нижним индексам и определяются по заданному метрическому тензору $g_{ij}(x, t)$. В самом деле, дифференцируя по x^k равенство $g_{ij} = \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j$, имеем на основании (5.1), (4.20')

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}. \quad (5.3)$$

Аналогично

$$g_{ik,j} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i},$$

$$g_{jk,i} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j},$$

откуда

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) = e_{ik,j} + e_{jk,i} - e_{ij,k}, \quad (5.4)$$

$\Gamma_{ij,k}$ и Γ_{ij}^k не являются тензорами, что следует из (5.1).

Математически уравнения совместности деформаций получаются как условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (5.1) относительно \mathfrak{a}_i , если заданы функции $\Gamma_{ij}^k(x)$. Дифференцируя (5.1) по x^l , имеем

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{a}_i}{\partial x^j \partial x^l} \equiv \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nl}^m \right) \mathfrak{a}_m. \quad (5.5)$$

Обозначим равную нулю при $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{x}_i$, разность $\mathfrak{a}_{i,jl} - \mathfrak{a}_{i,lj}$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{a}_i}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 \mathfrak{a}_i}{\partial x^l \partial x^j} \equiv R_{ji}^m \mathfrak{a}_m. \quad (5.6)$$

Из (5.5) видно, что

$$R_{ji}^m = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nl}^m \right)_{[j]i},$$

где значок $[jl]$ означает альтернирование выражения, взятого в скобках, по индексам j, l , т. е.

$$R_{jl}^m = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^l} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nl}^m - \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial x^j} - \Gamma_{il}^n \Gamma_{nj}^m. \quad (5.7)$$

С помощью формул (5.3), (5.7) введем

$$R_{jlk} = R_{jl}^m g_{mk} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij,k}}{\partial x^l} - \Gamma_{ij}^n \Gamma_{kl,n} \right)_{[jl]}. \quad (5.8)$$

Отсюда очевидно, что справедливы формулы

$$R_{jlk} = -R_{ljk} = -R_{lki} = R_{kji}, \quad (5.8')$$

$$R_{jlk} \equiv 0 \text{ при } j=l.$$

Поэтому можно доказать, что среди всех величин R_{jlk} имеется только шесть независимых. Для этого следует обратить внимание на порядок расположения четырех индексов выражения R_{jlk} и учесть, что оно согласно (5.8) равно альтерниации по первым двум индексам выражения, стоящего в скобках (5.8). Поэтому тождественно не равны нулю согласно (5.8') только компоненты R_{mnpq} , в которых ни два первых (m, n), ни два последних (p, q) не равны между собой. Но среди четырех индексов, принимающих каждый значения (1, 2, 3), два равны между собой. Следовательно, только следующие две группы последовательно расположенных индексов $\alpha\beta\alpha$ и $\alpha\beta\gamma$, где $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, принимают значения (1, 2, 3) и могут дать независимые и нетождественно равные нулю выражения (5.8). Первая группа дает комбинации 1221: 2332, 3113, 1331, 3223, 2112, причем либо три первых, либо три последних приводят к независимым компонентам, например R_{1221} , R_{2332} , R_{3113} ; вторая группа $\alpha\beta\gamma$ из шести возможных числовых комбинаций 1223, 2331, 3112, 1332, 3221, 2113 дает либо первые, либо последние три независимые компоненты, например R_{1223} , R_{2331} , R_{3112} .

Условия совместности деформаций, являющиеся тождествами, если метрический тензор $\tilde{\mathcal{E}}$ или тензор деформации $\tilde{\mathcal{E}}$ выражены через вектор $x(x, t)$ или вектор $u(x, t)$, имеют вид

$$R_{\alpha\beta\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^m \Gamma_{\alpha\beta m} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\beta\alpha}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\beta}^m \Gamma_{\alpha\alpha m} = 0, \quad (5.9)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^m \Gamma_{\beta\gamma m} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\beta}^m \Gamma_{\alpha\gamma m} = 0,$$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, и принимают значения 1, 2, 3.

Деформацию сплошной среды в эйлеровом пространстве x за бесконечно малое время dt в любой фиксированный момент $t=t_0$ можно рассматривать с точки зрения Лагранжа, если поле вектора скорости $v(x, t)$ задано и если в момент времени $t'=t_0+dt$ определить перемещение

$$u'(x, t') = v(x, t') dt \quad (5.10)$$

и координаты частиц

$$x' = x + u'(x, t'). \quad (5.11)$$

В пределах интервала dt при данном $t(x_1, x_2, x_3)$ будет лагранжевой ортогональной системой координат в репере e_i . Тензор бесконечно малых деформаций среды за время dt обозначим $v_{ij}dt = e'_{ij}$, причем v_{ij} называется тензором скоростей деформаций среды в эйлеровом пространстве.

Тензор деформаций e'_{ij} находится по формулам (4.49) путем замены $x \rightarrow x'$, $x \rightarrow x'$, $e_{ij} \rightarrow e'_{ij}$, $u \rightarrow u'$,

$$2e'_{ij} = 2v_{ij}(x, t) dt = u'_{i,j} + u'_{j,i} + u'_{m,i}u'_{m,j}, \quad (5.12)$$

причем нелинейные слагаемые суть бесконечно малые высшего порядка. Метрический тензор g_{ij} находится из (4.48) и равен

$$g'_{ij} = \delta_{ij} + 2e'_{ij}, \quad (5.12')$$

т. е. при $dt \rightarrow 0$ он равен δ_{ij} . Внося в (5.12) выражения u' из (5.10), деля на dt и отбрасывая бесконечно малые величины, получим выражения компонент тензора скоростей деформаций в эйлеровом пространстве

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.13)$$

С другой стороны, можно рассматривать малые относительные перемещения точек среды, т. е. такие, что в любой момент времени $t > t_0$ (t_0 — начальный момент) перемещение точек $u(x, t) = x' - x$ обладает свойством

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \leq \delta, \quad \delta \ll 1 \quad (5.14)$$

для всех i, j и в любой точке x . В этом случае можно исключить переносное движение среды (связывая систему координат x с каким-нибудь физическим волокном и плоскостью в точке $x=0$); из (5.14) получим, что в подвижной системе сам вектор перемещения u будет малым порядка δ сравнительно с размерами области, занятой средой. Разница между этим и рассмотренным выше случаем в том, что в случае (5.10) $\partial u'_i / \partial x_j = \partial v_i / \partial x_j dt$ является бесконечно малой величиной.

От (5.14) отличается случай **малой деформации**, когда ε_{ij} сохраняет полное выражение (4.49), но удовлетворяет условию

$$|\varepsilon_{ij}| \leq \delta, \quad \delta \ll 1, \quad (5.15)$$

отличие в том, что при малых деформациях система координат может быть не привязана к физическим волокну и плоскости.

Мы рассмотрим случай малых порядков δ перемещений, затем автоматически распространим все результаты на бесконечно малые деформации. Неточность всех формул теории малых деформаций будет порядка δ сравнительно с единицей. Соответствующие формулы в случае бесконечно малых деформаций будут точными. Вектор относительного перемещения δ точки N относительно M в момент t , очевидно, равен

$$\delta = \rho - \xi = x(x + \xi, t) - x(x, t) - \xi = \frac{\partial x}{\partial x} \xi - \xi = (\tilde{A} - I) \xi.$$

Обозначая $D = \tilde{A} - I$ тензор *дисторсии*, получим согласно (4.4), (4.7)

$$D = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \delta = D\xi = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \xi_j e_i, \quad (5.16)$$

$$\delta_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \xi_j, \quad \rho_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \xi_j.$$

Пренебрегая малыми порядка δ^2 сравнительно с δ , из (4.48), (4.49) получим для компонент метрического тензора $\tilde{\mathcal{G}}$ и тензора деформаций $\tilde{\mathcal{E}}$ выражения компонент

$$\tilde{\mathcal{G}} = (g_{ij}), \quad g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}, \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Соотношения (5.17) представляют *формулы Коши*, выражающие тензор малой деформации через вектор перемещения u . Соответствующие выражения компонент тензора скоростей деформации v_{ij} в эйлеровом пространстве, как видим, получаются из (5.17) простой заменой u на v и x на x и приводят к *формулам Стокса*:

$$v_{ij} = v_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.18)$$

Малые и бесконечно малые деформации аддитивны в том смысле, что если даны поля перемещения $u^1(x, t)$ и $u^2(x, t)$ с соответствующими деформациями ε_{ij}^1 , ε_{ij}^2 , вычисляемыми по фор-

мулам Коши (5.17), то полю перемещения $u = u^1 + u^2$ соответствуют деформации e_{ij} , равные сумме соответствующих деформаций:

$$u(x, t) = u^1(x, t) + u^2(x, t), \quad e_{ij} = e_{ij}^1 + e_{ij}^2. \quad (5.19)$$

Аналогичное верно для двух полей скоростей $v^1(x, t)$, $v^2(x, t)$ в эйлеровом пространстве при любых деформациях на основании формул Стокса

$$v(x, t) = v^1(x, t) + v^2(x, t), \quad v_{ij} = v_{ij}^1 + v_{ij}^2. \quad (5.20)$$

Как уже отмечалось в § 4, можно установить кинематический смысл компонент тензора малых деформаций. Из формулы (4.38) находим с рассматриваемой точностью

$$(1 + e_\alpha)^2 = 1 + 2e_{\alpha\alpha}; \quad e_\alpha = e_{\alpha\alpha}.$$

Косинус угла $\theta_{\alpha\beta}$ между координатными волокнами α и β , равный нулю до деформации, после деформации согласно формуле (4.44) равен

$$\cos \theta_{\alpha\beta} = 2e_{\alpha\beta} (1 - e_{\alpha\alpha} - e_{\beta\beta}) = 2e_{\alpha\beta},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{\alpha\beta} \right) = 2e_{\alpha\beta}.$$

Следовательно, компоненты тензора малой деформации с одинаковыми индексами суть *относительные удлинения* координатных волокон, а удвоенные компоненты малой деформации со смешанными индексами суть *уменьшения прямых углов* между парами координатных волокон, называемые сдвигами.

Координатный вектор-волокно $(\xi)_\alpha = \xi_\alpha e_\alpha$ в результате малой деформации станет вектор-волокном $(\rho)_\alpha$, направляющие косинусы которого согласно (4.46) определяются формулами

$$l_\alpha^i = \frac{A_\alpha^i}{1 + e_\alpha} = (1 - e_{\alpha\alpha}) \delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}, \quad (5.21)$$

$$(\rho)_\alpha = |(\rho)_\alpha| l_\alpha^i e_i = \xi_\alpha \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right) e_i, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Разложение тензора дисторсии на тензор чистой деформации и тензор поворота. Рассмотрим тождество

$$D = \tilde{\epsilon} + \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = (\omega_{ij}); \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \omega_{ij}, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right),$$

в котором $\tilde{\omega}$ называется тензором поворота. Тензор $\tilde{\omega}$ антисимметричен, и потому он может быть выражен через вектор ω , называемый *ротором вектора* u , или вектором поворота окрестности точки x ,

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u = \omega_i e_i. \quad (5.23)$$

Компоненты вектора ω связаны с компонентами тензора $\tilde{\omega}$ соотношениями

$$\omega_\alpha = -\omega_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right). \quad (5.24)$$

На основании разложения (5.22) вектор относительного перемещения δ (5.16) представим в виде суммы

$$\delta = \delta^e + \delta^\omega, \quad \delta^e = \delta^e_i e_i = \varepsilon_{ij} \xi_j e_i, \quad \delta^\omega = \omega_i \xi_i e_i = \omega \times \xi, \quad (5.25)$$

причем δ^e и δ^ω называются соответственно перемещением, связанным с чистой деформацией, и перемещением, связанным с поворотом ω окрестности точки M . Равенство δ^ω векторному произведению $\omega \times \xi$ проверяется непосредственно на основании (5.24) и определения

$$\omega \times \xi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}. \quad (5.26)$$

Метрический тензор с точностью до δ^2 равен

$$\tilde{g} = I + 2\tilde{e}, \quad \tilde{e} = \frac{1}{2} (D + D^T) \quad (5.27)$$

и, следовательно, в соответствии (4.59)

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{21} & 1 + 2\varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} & 2\varepsilon_{32} & 1 + 2\varepsilon_{33} \end{vmatrix} = 1 + 2I_{e1}. \quad (5.28')$$

Поэтому относительное объемное расширение частицы будет равно

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0} = \sqrt{g} - 1 = I_{e1} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = \operatorname{div} u. \quad (5.28)$$

Закон сохранения массы $\rho(1 + \theta) = \rho_0$ дает выражение плотности ρ через θ и начальную плотность ρ_0 :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \theta} = (1 - \theta) \rho_0.$$

В частности, если можно пренебречь изменением плотности, то условие объемной несжимаемости вещества имеет вид

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5.29)$$

Разложение тензора малой деформации на девиатор и шаровой тензор. Девиатором деформаций называется тензор с компонентами e_{ij} ,

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - e \delta_{ij}, \quad e = 1/3\theta, \quad (5.30)$$

причем $e \delta_{ij}$ называется шаровым тензором, так как соответствующая ему поверхность есть сфера

$$e \delta_{ij} X_i X_j \equiv e (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) = \text{const.}$$

Первый инвариант девиатора деформаций $I_1 \tilde{e} = \tilde{e}_{ij} \delta_{ij} = 0$, второй —

$$-2I_2 \tilde{e} = \vartheta^2 = \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2, \quad (5.31)$$

где $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ — главные компоненты девиатора деформаций.

Относительное перемещение δ^* (5.25) в главных осях деформаций имеет выражение (в главном репере \mathbf{e}_{i0}) $\delta^* = e_i \xi_i \mathbf{e}_{i0}$. Рассматривая октаэдрическую площадку (отсекающую равные отрезки по главным осям) и волокно ξ , равно наклоненное к главным осям, так что $\xi_i = |\xi|/\sqrt{3}$, найдем его относительное удлинение

$$e_\xi = \delta^* \xi / \xi^2 = 1/3 (e_1 + e_2 + e_3) = e = \theta/3.$$

Сдвиг конца волокна ξ (линейный сдвиг октаэдрической площадки) равен $\sqrt{(\delta^*)^2 - \xi^2 e_\xi^2}$, относительный сдвиг получается делением на $|\xi|$. Удвоенный относительный сдвиг октаэдрической площадки называется *октаэдрическим сдвигом* γ_v :

$$\gamma_v = 2 \sqrt{(\delta^*)^2 - \xi^2 e_\xi^2} / |\xi| = 2 \sqrt{1/3 (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - e^2}.$$

На основании (5.31) получаем

$$\frac{2\vartheta}{\sqrt{3}} = \gamma_v = 2/\sqrt{3} \sqrt{\tilde{e}_1^2 + \tilde{e}_2^2 + \tilde{e}_3^2} = 2/3 \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}, \quad (5.32)$$

т. е. пропорционален корню из второго инварианта девиатора деформации с обратным знаком. Величина $\vartheta = \sqrt{\tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ij}}$ называется *модулем девиатора*, или *интенсивностью деформации*. Аналогич-

ные формулы верны для девиатора скоростей деформаций (\bar{v}_k — главные компоненты)

$$\tilde{v}_{ij} = v_{ij} - 1/3 v_{kk} \delta_{ij}, \quad \tilde{v}^2 = \tilde{v}_{ij} \tilde{v}_{ij} = 1/3 [(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2 + (\bar{v}_2 - \bar{v}_3)^2 + (\bar{v}_3 - \bar{v}_1)^2]. \quad (5.32')$$

Условия совместности Сен-Венана для малых деформаций получаются из (5.4), (5.9). Символы Кристоффеля (учитывая $g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$) будут малыми порядка δ , а их произведения — порядка δ^2 . В результате получаем шесть уравнений

$$\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}, \quad (5.33')$$

из которых следуют шесть условий Сен-Венана:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (5.33)$$

(в каждой из выписанных формул следует сделать круговую перестановку индексов 1, 2, 3). Естественно, что если в (5.33) ввести выражения ε_{ij} по формулам Коши (5.17), получатся тождества. Иногда их называют тождествами Сен-Венана.

Все полученные выше для малых деформаций среды формулы при указанной ранее замене $x \rightarrow x$, $u \rightarrow v$, $\varepsilon_{ij} \rightarrow v_{ij}$ справедливы для мгновенных деформаций ее в эйлеровом пространстве, но имеют соответствующую трактовку. Заменяя u на $v(x, t)$, ε_{ij} на v_{ij} , x на x , из (5.23) и (5.24) находим

$$\Omega(x, t) = \frac{1}{2} \text{rot } v = \Omega_i e_i, \quad (5.34)$$

$$\Omega_\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\gamma} \right), \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3),$$

причем Ω называется *вектором вихря* — вектором мгновенной угловой скорости вращения частицы среды. Тензор v_{ij} (5.18) представляет тензор скоростей деформаций частицы, т. е. компоненты v_{11} , v_{22} , v_{33} суть мгновенные скорости относительных удлинений координатных волокон, взятых по осям x_i , а удвоенные смешанные компоненты $2v_{12}$, $2v_{23}$, $2v_{31}$ — скорости сдвигов (скольжения) координатных площадок. (Их механический смысл понятен из рис. 5.1.)

Инвариантам малых деформаций соответствуют инварианты тензора скоростей деформаций

$$I_1 = v_{11} + v_{22} + v_{33} = v_{ij} \delta_{ij} = \text{div } v,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - v_i v_{i1}), \quad (5.35)$$

$$I_3 = |v_i|.$$

Объему V_0 в (5.28) теперь соответствует объем частицы в момент t (ρ_0 — плотность в этот момент), объему V — объем в момент $t+dt$ (ρ — плотность). Следовательно, $d\theta = -d\rho/\rho$, и потому из (5.28) имеем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \quad (5.36)$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

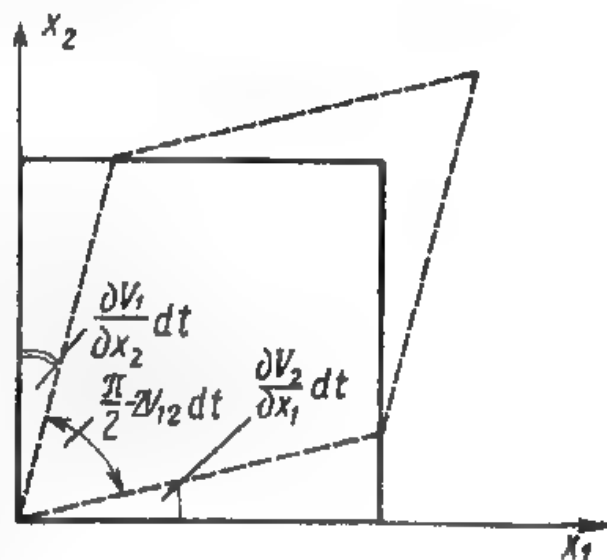


Рис. 5.1

причем $d\rho/dt$ — субстанциональная производная:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

Из (5.36) находим

$$\theta = \ln \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (5.36')$$

Следовательно, мы получили *условие сохранения массы частицы в эйлеровом пространстве*, выражающееся одним из уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0, \quad \frac{d \ln \rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.37)$$

Условие *объемной несжимаемости* среды имеет вид $d\rho/dt = 0$, или

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.38)$$

Условия совместности компонент тензора скоростей деформаций v_{ij} получаются из (5.33) заменой ε_{ij} на v_{ij} и \mathbf{x} на \mathbf{x} .

Движение среды называется *безвихревым*, или *потенциальным*, если $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. При этом из условий

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

следует существование потенциала скоростей $\varphi(\mathbf{x}, t)$

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Если к тому же среда несжимаема, то из (5.38) следует

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta \varphi = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

и называется *оператором Лапласа*. Потенциал скоростей φ — *гармоническая функция*. Этим свойством обладает движение идеальной несжимаемой жидкости в потенциальном поле сил, если в какой-нибудь момент $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$.

Движение любой сплошной среды, рассматриваемое в эйлеровом пространстве, обладает некоторыми свойствами, вытекающими из определений линий токов, вихрей и закона сохранения массы. Как уже отмечалось в § 3, *линией тока* в момент t называется траектория вектора скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, проходящая через какую-нибудь точку \mathbf{x}_0 , т. е. линия, определяемая дифференциальным уравнением

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\lambda, \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = d\lambda, \quad (5.39)$$

где λ — параметр. Решение этого уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \lambda, t); \quad x_i = f_i(\mathbf{x}_0, \lambda, t) \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.40)$$

является параметрическим уравнением линии тока. Если в момент $t = \text{const}$ рассмотреть какую-нибудь линию $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\mu)$, то из (5.40) получим $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mu, \lambda)$, т. е. уравнение поверхности. Если линия $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}(\mu)$ замкнута, то поверхность $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mu, \lambda)$ называется *трубкой тока*.

Потоком массы среды через любую неподвижную поверхность \mathcal{F} называется секундный расход

$$\int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} d\Sigma = \int_{\mathcal{F}} \rho v_n d\Sigma,$$

где \mathbf{v} — нормаль, $\mathbf{v} \mathbf{v} = v_n$ — нормальная составляющая скорости \mathbf{v} , $d\Sigma$ — элемент площади поверхности.

Вектор скорости \mathbf{v} лежит на поверхности трубки тока, и потому поток массы среды внутрь трубки равен нулю. Рассмотрим в фиксированный момент t внутри области движения среды произвольный объем V , ограниченный замкнутой поверхностью Σ . Проинтегрируем по V умноженное на $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ уравнение (5.37); получим

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) dV = - \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV.$$

Но по формуле Грина — Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} A dV = \int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dV = \int_\Sigma A v d\Sigma. \quad (5.41)$$

Следовательно,

$$\int_\Sigma \rho v v d\Sigma = - \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV, \quad (5.42)$$

т. е. поток массы через замкнутую неподвижную поверхность Σ равен секунднему ее изменению в объеме V с обратным знаком.

Из определения вектора вихря Ω (5.34) следует

$$\operatorname{div} \Omega = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.43)$$

Внося Ω вместо A в (5.41), получим теорему Стокса

$$\int_\Sigma \Omega v d\Sigma = 0, \quad (5.44)$$

т. е. поток вихря через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если \mathcal{F} — незамкнутая поверхность, ограниченная замкнутым контуром L , то поток вихря через \mathcal{F} равен интегралу по \mathcal{F} от $\Omega v d\Sigma$. Но для любого вектора B по формуле Стокса

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} B v d\Sigma = \int_L B dS, \quad (5.45)$$

где dS обозначает вектор-элемент длины дуги контура L ; выражение, стоящее в правой части (5.45), называется *циркуляцией вектора B по L* . Полагая $B = V$, получим

$$\int_{\mathcal{F}} \Omega v d\Sigma = \int_L v dS \equiv \Gamma, \quad (5.46)$$

т. е. еще одну теорему Стокса: поток вихря через незамкнутую поверхность \mathcal{F} равен циркуляции Γ вектора скорости по ограничивающему \mathcal{F} контуру L .

Отметим еще важное для дальнейшего свойство интегралов от различных функций $\varphi(x, t)$ по объему V_g фиксированной массы среды, т. е. ограниченному замкнутой поверхностью Σ_g , состоящему из неизменных физических частиц. Найдем полную производную по времени от интеграла

$$I = \int_{V_g} \varphi(x, t) \rho(x, t) dV. \quad (5.47)$$

Так как область интегрирования V_g меняется со временем, то на основании закона движения частиц $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$ преобразуем (5.47) к лагранжевым координатам. Из условия сохранения массы физической частицы имеем

$$\rho dV = \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \rho_0 dV_0 = \rho_0(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3; \quad (5.48)$$

на основании закона движения

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}, t). \quad (5.49')$$

Область V_0 (для фиксированной массы) не изменяется со временем. Тогда получим

$$I = \int_{V_g} \rho \varphi dV = \int_{V_0} \chi(\mathbf{x}, t) \rho_0(\mathbf{x}) dV_0$$

и, следовательно,

$$\frac{dI}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \rho_0(\mathbf{x}) dV_0.$$

Переходя обратно от \mathbf{x} к $\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$ и учитывая, что для неизменной частицы

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{d\varphi(\mathbf{x}, t)}{dt}, \quad (5.49)$$

получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V_g} \varphi(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_g} \frac{d\varphi(\mathbf{x}, t)}{dt} \rho(\mathbf{x}, t) dV.$$

Если объем V и граница области Σ фиксированы и неизменны в эйлеровом пространстве, то, обозначая их V_C , Σ_C , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \varphi(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_C} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV.$$

§ 6. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Основная идея теории внутренних сил в МСС уже изложена в § 3: любой объем, мысленно выделенный внутри среды, находится в равновесии под действием массовых сил и «внутренних», непрерывно распределенных по каждой части ограничивающей поверхности, на которой единичная нормаль изменяется непрерывно.

Выделим в некоторой точке $M(\mathbf{x})$ среды в деформированном состоянии бесконечно малый тетраэдр $MABC$ (рис. 6.1), основные

ребра которого MA , MB и MC направлены по векторам репера \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_3 .

Обозначим удвоенные площади треугольника MBC через $d\Sigma^1$, треугольника MAC — через $d\Sigma^2$, треугольника MAB — через $d\Sigma^3$, а треугольника ABC — через $d\Sigma^v$. Единичные векторы нормалей площадок $d\Sigma^\alpha$, очевидно, коллинеарны векторам \bar{e}^α ($\alpha=1, 2, 3$). Величины этих площадок определяются через начальные

$$d\Sigma^{\alpha 0} = dx^\beta dx^\gamma$$

соотношениями (4.27)

$$d\Sigma^\alpha = \sqrt{g g^{\alpha\alpha}} d\Sigma^{\alpha 0}. \quad (6.1)$$

Напомним, что по греческим индексам суммирование не происходит. Вектор-площадь треугольника ABC подсчитывается по формуле (4.31):

$$d\Sigma^v \cdot \mathbf{v} = \sqrt{g} d\Sigma^{\alpha 0} \bar{e}^\alpha, \quad (6.2)$$

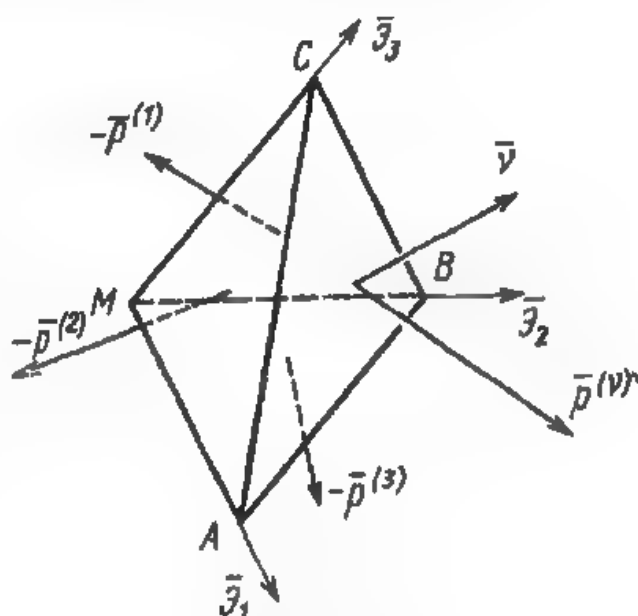


Рис 6.1

где \mathbf{v} — единичный вектор внешней нормали к площадке ABC :

$$\mathbf{v} = v_i \bar{e}^i = v^i \bar{e}_i, \quad (6.3)$$

причем v_i — ковариантные, v^i — контравариантные компоненты \mathbf{v} .

Из формул (6.1) и (6.2) находятся выражения $d\Sigma^\alpha$ через $d\Sigma^v$ и \mathbf{v} :

$$d\Sigma^\alpha = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} v_\alpha d\Sigma^v. \quad (6.4)$$

Как установлено в § 3, взаимодействие рассматриваемой нами частицы-тетраэдра с окружающей средой реализуется за счет векторов внутренних сил, действующих по граням, с точностью до малых порядка $|dx|$, равномерно по ним распределенных. На каждую из площадок $d\Sigma^\alpha$ действует поверхностная сила плотности $\mathbf{P}^{(\alpha)}$, а на площадку $d\Sigma^v$ — поверхностная сила плотности $\mathbf{P}^{(v)}$. Эти векторы называются *векторами истинных внутренних напряжений*. С точностью до малых высшего порядка силы, действующие по граням тетраэдра, равны

$$-\mathbf{P}^{(\alpha)} d\Sigma^\alpha + O(|dx|^3) \quad (\alpha=1, 2, 3). \quad (6.5)$$

Мы здесь учли, что векторы внешней нормали к площадкам $d\Sigma^\alpha$ направлены в обратную сторону по отношению к векторам \bar{e}^α . Очевидно, элементарный объем тетраэдра $dV = d\Sigma^v \cdot h/3$, где h — величина перпендикуляра, опущенного из точки M на $d\Sigma^v$. Учиты-

вая еще равенства (6.4), (6.5), получим на основании принципа Даламбера

$$d\Sigma^v \left[\frac{1}{3} (\rho F - \rho w) h + P^{(v)} - \sum_{\alpha=1}^3 P^{(\alpha)} v_{\alpha} \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \right] + O(|dx|^3) = 0, \quad (6.6')$$

где w — ускорение; слагаемое порядка h учитывает силу инерции и массовую силу F , действующие на частицу. Сокращая на $d\Sigma^v$ и устремляя $h \rightarrow 0$ вместе с $|dx|$, получим условие равновесия бесконечно малого тетраэдра

$$P^{(v)} = \sqrt{g^{11}} P^{(1)} v_1 + \sqrt{g^{22}} P^{(2)} v_2 + \sqrt{g^{33}} P^{(3)} v_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \sqrt{g^{\alpha\alpha}} P^{(\alpha)} v_{\alpha}. \quad (6.6)$$

Эта очень важная формула называется выражением вектора истинного напряжения на косой площадке с нормалью \mathbf{v} через основные координатные векторы напряжений. Она доказывает, что *вектор внутреннего напряжения $P^{(v)}$ на площадке с нормалью \mathbf{v} — линейная функция \mathbf{v}* . Формула (6.6) справедлива как для внутренних площадок $d\Sigma^v$, так и для площадок, расположенных на границе Σ области движения среды; из закона равенства действия и противодействия заданная на границе тела сила $P_{\text{внешн}}^{(v)}$ равна $P^{(v)}$, имеющей выражение (6.6). Естественно, что $P_{\text{внешн}}^{(v)}$ может быть любой функцией координат и нормали \mathbf{v} на Σ .

Обозначим векторы, называемые *основными контравариантными векторами напряжения*:

$$\begin{aligned} S^1 &= \sqrt{g^{11}} P^{(1)} \\ S^{\alpha} &= \sqrt{g^{\alpha\alpha}} P^{(\alpha)}, \quad S^2 = \sqrt{g^{22}} P^{(2)} \\ S^3 &= \sqrt{g^{33}} P^{(3)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Как видим, векторы S^{α} не зависят от \mathbf{v} и отличаются от векторов истинных напряжений, хоть и коллинеарны им, так как $g^{\alpha\alpha} \neq 1$ при всевозможных значениях t .

Из (6.6) с помощью новых обозначений получим

$$P^{(v)} = S^i v_i = S^i v_i \partial_i, \quad (6.8)$$

при этом векторы S^i и $P^{(\alpha)}$ мы представили в репере \mathbf{e}_j

$$S^i = S^i \partial_i, \quad P^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} S^{\alpha} = \frac{S^{\alpha} \partial_j}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}}. \quad (6.9)$$

Нормальная составляющая вектора $P^{(v)}$ на площадке $d\Sigma^v$ является скалярной величиной и с учетом (6.3) имеет значение

$$N^{(v)} \equiv \mathbf{v} P^{(v)} = S^i v_i \mathbf{v} \partial_j = S^i v_i v_j, \quad (6.10)$$

Поскольку \mathbf{v} — вектор и $N^{(v)}$ — скаляр, то из (6.10) следует (по обратному признаку тензора), что S^{ij} представляют контравариантные компоненты тензора напряжений \tilde{S} в лагранжевом репере ∂_i ; в таком представлении \tilde{S} называется тензором напряжений Коши — Лагранжа. Касательная составляющая \mathbf{P}^v равна

$$T^{(v)} = V \sqrt{(\mathbf{P}^{(v)})^2 - (N^{(v)})^2}. \quad (6.11)$$

Так как в (6.7) множитель $V \sqrt{g^{\alpha\alpha}}$ при $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ различен для разных α , то выражение $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ в репере ∂_j

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = P^{(\alpha j)} \partial_j \quad (6.12)$$

приводит к объекту $P^{(ij)}$, не являющемуся тензором.

Тензор S^{ij} симметричен, поскольку приложенные к частице внешние (массовые) силы дают момент относительно центра частицы, являющийся величиной, малой более высокого порядка сравнительно с бесконечно малым порядка dV . Обычно рассматриваемые в механике силы, как указывалось, обладают этим свойством.

Доказательство симметрии компонент S^{ij} следует из уравнения моментов для параллелепипеда, если учесть, что момент векторов сил $\mathbf{P}^{(\alpha)} d\Sigma^\alpha$, действующих по всем шести граням, должен равняться нулю с точностью, включающей малые порядка dV . При этом напряжения $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ равномерно распределены по соответствующим граням и, значит, векторы $\mathbf{P}^{(\alpha)} d\Sigma^\alpha$ приложены в центрах граней параллелограммов. Например, вектор $\mathbf{P}^{(3)} d\Sigma^3$ приложен в точке с координатой (относительно M) $\mathbf{r}_3 = 1/2 (\partial_1 dx^1 + \partial_2 dx^2)$ на нижней площадке $d\Sigma^3$, и равный ему (с точностью до малых высшего порядка) — в точке с координатой $\mathbf{r}'_3 = 1/2 (\partial_1 dx^1 + \partial_2 dx^2) + \partial_3 dx^3$ — на верхней $d\Sigma^3$. С точностью до малых высшего порядка момент сил, действующих по нижней и верхней граням $d\Sigma^3$, равен

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{P}^{(3)} d\Sigma^3 \times \mathbf{r}'_3 - \mathbf{P}^{(3)} d\Sigma^3 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{P}^{(3)} \times (\mathbf{r}'_3 - \mathbf{r}_3) d\Sigma^3 = \mathbf{P}^{(3)} \times \partial_3 dx^3 d\Sigma^3. \quad (6.13)$$

Но

$$d\Sigma^3 = V \sqrt{g} V \sqrt{g^{33}} dx^1 dx^2,$$

и потому, учитывая (6.7) и (6.9), получаем

$$\mathbf{m}_3 = V \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \mathbf{S}^3 \times \partial_3 = dV S^{3i} \partial_i \times \partial_3 \quad (6.14)$$

Моменты \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 по граням $d\Sigma^1$ и $d\Sigma^2$ аналогичны, и потому условие $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 = 0$ принимает вид

$$\mathbf{m} = dV \{S^{1j} \partial_j \times \partial_1 + S^{2j} \partial_j \times \partial_2 + S^{3j} \partial_j \times \partial_3\} = dV S^{ij} \partial_j \times \partial_i = 0. \quad (6.15)$$

Учитывая, что $\partial_i \times \partial_j = -\partial_j \times \partial_i$, из (6.15) имеем

$$(S^{12} - S^{21}) \partial^3 + (S^{23} - S^{32}) \partial^1 + (S^{31} - S^{13}) \partial^2 = 0, \quad (6.16)$$

откуда и следуют условия симметрии $S^{ij} = S^{ji}$.

Из свойства симметрии тензора \tilde{S} следует закон взаимности напряжений на основных площадках $d\Sigma^\alpha$; умножая S^α (6.7) на ∂^β и учитывая (6.7), получим выражение компонент $S^{\alpha\beta}$ через основные векторы истинных напряжений и единичный базис k^β :

$$S^{\alpha\beta} = \sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}} P^{(\alpha)} k^\beta, \quad k^\beta = \frac{\partial^\beta}{|\partial^\beta|}.$$

Из симметрии $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$ находим закон взаимности

$$P^{(\alpha)} k^\beta = P^{(\beta)} k^\alpha: \quad (6.17)$$

проекция $P^{(\alpha)}$ на направление $\partial^{(\beta)}$ равна проекции $P^{(\beta)}$ на направление ∂^α .

С помощью метрического тензора \tilde{g} и аффинора A тензор напряжений \tilde{S} можно представить в репере ∂^i другими компонентами, например ковариантными и смешанными

$$S_{ij} = S^{mn} g_{im} g_{jn} = S^m_j g_{im} = S_i^m g_{mj}, \quad (6.18)$$

причем вектор напряжений $P^{(v)}$ согласно (6.8) при замене $\partial_j = \partial^m g_{mj}$ и $v_i = v^n g_{in}$ получит выражения

$$P^{(v)} = S_{mn} v^n \partial^m = S^i_j v_j \partial^i. \quad (6.19)$$

Тензор \tilde{S} можно представить также и в других реперах. Напряжение можно представить и другими матрицами, не являющимися собственно тензорами. Приведем две из них.

Напряжения, отнесенные к недеформированным площадкам.

Пусть начальная элементарная вектор-площадка $d\Sigma^0 = d\Sigma n^0$ с единичным вектором нормали $n^0 = n_i^0 e_i$ в результате деформации превращается в вектор-площадку $d\Sigma = d\Sigma v^0$ с единичным вектором нормали $v^0 = v_i^0 \partial^i$. Тогда, очевидно, $d\Sigma_i^0$ в репере e_i равна $d\Sigma n_i^0$, и потому, полагая в формуле (6.2) $d\Sigma^v = d\Sigma$ и умножая обе части (6.2) на ∂_j (с учетом $\partial^i \partial_j = \delta_j^i$), получим

$$d\Sigma v_j^0 = \sqrt{g} n_j^0 d\Sigma, \quad \frac{d\Sigma}{d\Sigma^0} v_j^0 = \sqrt{g} n_j^0. \quad (6.20)$$

Вектор $t^{(v)}$, определенный равенством

$$t^{(v)} d\Sigma^0 = P^{(v)} d\Sigma = S^i_j v_j^0 d\Sigma, \quad (6.21)$$

называется *условным напряжением* на площадке $d\Sigma$ с нормалью \mathbf{v} ; он коллинеарен $\mathbf{P}^{(\nu)}$ и равен

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{S}^i \sqrt{g} n_i^0, \quad (6.21')$$

т. е. существует в репере (\mathbf{e}_i) вектор \mathbf{t}^i , такой, что подобно (6.8)

$$\mathbf{t}^{(\nu)} = \mathbf{t}^i n_i^0, \quad \mathbf{t}^i = \sqrt{g} \mathbf{S}^i. \quad (6.22)$$

Вектор \mathbf{t}^i можно представить в базисе \mathbf{e}_j через его компоненты

$$\mathbf{t}^i = t^{ij} \mathbf{e}_j. \quad (6.23)$$

Формула (6.22) для \mathbf{t}^i с учетом (6.9) принимает вид

$$\mathbf{t}^i = \sqrt{g} S^{ik} \mathbf{e}_k = S^{ik} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k} \sqrt{g}. \quad (6.24)$$

Отсюда, заменяя $\mathbf{x} = x_k \mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_j = A_j^k \mathbf{e}_k$, находим связь между компонентами t^{ij} и S^{ij} .

$$t^{ij} = \sqrt{g} A_j^k S^{ik}. \quad (6.25)$$

Псевдотензор t^{ij} вследствие определения его на основании (6.21) называется тензором *условных напряжений* Пиолы — Кирхгофа.

Как видно из выражения компонент t^{ij} (6.25), матрица t^{ij} — несимметричная. Связь компонент тензора условных напряжений t^{ij} с истинными векторами напряжений $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ на деформированных вектор-площадках $d\Sigma^\alpha$ (при $t=t_0$ координатных $d\Sigma^\alpha$) находится из (6.7), (6.22):

$$\mathbf{t}^\alpha = \sqrt{g g^{\alpha\alpha}} \mathbf{P}^{(\alpha)}. \quad (6.26)$$

Единичная нормаль \mathbf{v} площадки $d\Sigma^\nu$ выражается через начальную нормаль \mathbf{n} этой площадки с помощью (4.31)

$$\mathbf{v} = n_i^0 \mathbf{e}_i / \sqrt{n_m^0 n_n^0 g^{mn}}. \quad (6.27)$$

Физическими компонентами тензора напряжений $\sigma_{\Phi}^{\alpha\beta}$ называются проекции векторов $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ по осям \mathbf{e}_i . Они определяются из равенств

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^3 P^{(\alpha j)} |\mathbf{e}_j| \frac{\mathbf{e}_j}{|\mathbf{e}_j|} \equiv \sigma_{\Phi}^{\alpha j} \mathbf{k}_j, \quad (6.28)$$

где \mathbf{k}_j — единичный базис направлений \mathbf{e}_j , $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha / |\mathbf{e}_\alpha|$. Как следует из (6.7), физические компоненты тензора напряжений связа-

ны с основными контравариантными компонентами напряжений S^{ij} следующим образом:

$$\sigma_{\Phi}^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g^{\alpha\alpha}}}, \quad \sigma_{\Phi}^{\alpha\alpha} = S^{\alpha\alpha} \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}}{g^{\alpha\alpha}}}, \quad (6.29)$$

В механике сплошной среды существенное значение имеет тензор мгновенных истинных напряжений, определенный в точке x пространства наблюдателя компонентами $\sigma_{ij} = \sigma^{ij}$ в декартовых координатах (x_i) . В объеме $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ (или $dx^1 dx^2 dx^3$) в момент t находится физическая частица — параллелепипед с координатными гранями, определяемыми вектор-нормальми e_α ; при $t = t_0$ эта частица была некоторым косоугольным параллелепипедом с направлениями и размерами основных ребер $(\xi)_j$, удовлетворяющими соотношения (4.9) — (4.10), в которых надо заменить $\rho \rightarrow (\rho)_\alpha = dx_\alpha e_\alpha$; следовательно, волокну $(\rho)_\alpha$ соответствует

$$(\xi)_\alpha = e_\alpha dx_\alpha = B_\alpha^i e_i dx_\alpha, \quad (6.30)$$

координатной площадке $d\mathcal{F}_\alpha = e_\alpha dx_\beta dx_\gamma$ — площадка

$$d\mathcal{F}_\alpha^0 = (\xi)_\beta \times (\xi)_\gamma = dx_\beta dx_\gamma e_\beta \times e_\gamma. \quad (6.31)$$

Вектор истинного напряжения на физической площадке, которая в момент t совпадает с $d\mathcal{F}_\alpha$, обозначим $\mathcal{P}^{(\alpha)}$, его компоненты в репере e_i обозначим $\sigma_{\alpha i}$, так что

$$\mathcal{P}^{(\alpha)} = \sigma_{\alpha i} e_i = \sigma^\alpha. \quad (6.32)$$

Полная сила, действующая на $d\mathcal{F}_\alpha$, равна $\mathcal{P}^{(\alpha)} d\mathcal{F}_\alpha$, где $d\mathcal{F}_\alpha = dx_\beta dx_\gamma$. Площадка $d\mathcal{F}_\alpha$ по отношению к реперу ε_i — наклонная с нормалью $\mathbf{v} = e_\alpha$, и потому вектор напряжения $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ совпадает с $\mathcal{P}^{(\mathbf{v})}$ (6.8) при $\mathbf{v} = e_\alpha$. Но

$$\mathbf{v} = e_\alpha = \varepsilon^i v_i, \quad v_i = \varepsilon_i e_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^i} = A_i^\alpha,$$

следовательно,

$$\sigma^\alpha = \mathcal{P}^{(\alpha)} = S^i A_i^\alpha \varepsilon_i = S^{ki} A_k^\alpha A_j^i e_i. \quad (6.33)$$

Сравнивая (6.32) и (6.33), находим выражения σ_{ij} через компоненты S^{ij} , т. е. формулы преобразования компонент \tilde{S} при переходе в точке x от репера ε_j к декартову e_i ,

$$\sigma^{\alpha i} = \sigma_{\alpha i} = S^{mn} A_m^\alpha A_n^i \quad (6.34)$$

Поскольку $S^{ij} = S^{ji}$, то и $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, т. е. компоненты σ_{ij} тензора мгновенных напряжений симметричны. Формулы (6.34) позволяют фактически вычислить истинные мгновенные напряжения $\sigma_{ij}(x, t)$,

если известен закон движения среды $x=x(x, t)$, по которому согласно (4.7) находятся A_j^i , так как (6.34) при этом определяют $\sigma_{ij}(x, t)$, а значит, и $\sigma_{ij}(x, t)$.

Обратные соотношения получаются из (6.34), если их умножить на $B_\alpha^k B_i^l$ и просуммировать по α и i . Учитывая (4.8) ($B_i^k A_j^l = \delta_j^k = \delta_{kl}$), получим

$$S^{kl} = \sigma_{ij} B_i^k B_j^l. \quad (6.35)$$

При заданных $\sigma_{ij}(x, t)$ и законе движения в обратной форме $x=x(x, t)$ из (4.10) находим

$$\frac{\partial x^m}{\partial x^n} = B_n^m(x, t),$$

а следовательно, и $B_n^m(x, t)$, после чего (6.35) дают $S^{kl}(x, t)$.

Обозначим через $\mathbf{n}=\mathbf{v}$ единичную нормаль к некоторой площадке в точке \mathbf{x} в момент t

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i, \quad v_i = n \mathbf{e}_i = n_k A_i^k$$

и найдем выражение истинного вектора напряжений $\mathcal{P}^{(n)}$ на ней, положив в (6.8) $\mathbf{v}=\mathbf{n}$, $\mathbf{P}^{(v)}=\mathcal{P}^{(n)}$; найдем

$$\mathbf{P}^{(v)} = S^j v_j = \sigma^j n_j. \quad (6.36)$$

Откуда получаются простые формулы для компонент напряжений $\mathbf{P}^{(n)}$ на косых площадках:

$$P_i^n \equiv \mathbf{P}^{(n)} \mathbf{e}_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (6.37)$$

Они очевидны и из простых соображений: при $t=t_0$ координаты x^k и x^k совпадают, так как при $t=t_0$, $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $A_n^m = \delta_n^m$, и потому из (6.34) $\sigma_{\alpha i} = S^{\alpha i}$; из (6.8) сразу находим (6.37). Отметим, что при $t=\text{const}$ вообще все свойства преобразований σ_{ij} , связанные с преобразованием репера \mathbf{e}_i , совпадают тождественно с соответствующими свойствами при малых деформациях.

Теория напряжений в декартовых координатах одинакова для малых деформаций в лагранжевом и для любых в эйлеровом пространствах. Если перемещения малы, то $|u_{i,j}| \leq \delta \ll 1$, $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$ и поэтому $g_{ij} = \delta_{ij}$ с ошибкой $\delta \ll 1$. Тензоры $S^{ij} = \sigma_{ij}$ совпадают, и для напряжений на косых площадках имеют место формулы (6.36), (6.37).

Нормальное напряжение $N^{(n)}$ на косой площадке равно $\mathcal{P}^{(n)} \cdot \mathbf{n}$, т. е.

$$N^{(n)} = \sigma_{ij} n_i n_j, \quad (6.38)$$

откуда по обратному признаку тензора непосредственно следует,

что σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат. Квадратичная форма

$$2\Phi_\sigma = \sigma_{ij} x_i x_j$$

с точностью до обозначений совпадает с 2Φ , § 5, и потому очевиден ряд свойств, вытекающих из уравнения поверхности напряжений Коши $2\Phi_\sigma = \text{const}$, если радиус-вектор $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ направить по нормали \mathbf{n} некоторой косо́й площадки

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{R}, \quad R = |\mathbf{x}|, \quad n_i = \frac{x_i}{R}.$$

Перечислим некоторые из них. Находим

$$\text{grad } \Phi_\sigma = \sigma_{ij} x_j \mathbf{e}_i = R \mathcal{P}^{(n)},$$

т. е. вектор $\mathcal{P}^{(n)}$ направлен по нормали к поверхности Коши. Существуют три ортогональных главных направления тензора напряжений, и они находятся из условия $\bar{\mathcal{P}}^{(n)} = \sigma \mathbf{n}$, т. е. из системы

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0,$$

а главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — из решения кубического уравнения $|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma| = 0$, три коэффициента которого суть инварианты ортогональных преобразований базиса \mathbf{e}_i ,

$$\sigma_{ij} \delta_{ij} = \sigma_{kk}, \quad \frac{1}{2} [(\sigma_{kk})^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}], \quad |\sigma_{ij}|.$$

Следовательно, инвариантами являются также

$$\begin{aligned} 3\sigma &= \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = S^{ij} g_{ij}, \\ \sigma_{ij} \sigma_{ij} &= \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = S^{ik} S^{il} g_{ik} g_{il}, \\ |\sigma_{ij}| &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Внося сюда выражения $\sigma_{ij} = \sigma^{ij}$ через S^{ij} (6.34) и используя (6.18), получим другие выражения

$$3\sigma = S_i^i = S^{ij} g_{ij}, \quad \sigma_{ij} \sigma_{ij} = S_i^j S_j^i, \quad |\sigma_{ij}| = |S_i^j|. \quad (6.40)$$

Напряжение $\sigma = 1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ называется *средним гидростатическим* по следующей причине. Мысленно выделим в среде частицу, которая имеет форму правильного октаэдра, главные оси которого совпадают с главными осями тензора \bar{S} . В первом октанте его грань имеет нормаль \mathbf{n} , равнонаклонную к главным осям, и потому $n_i = 1/\sqrt{3}$. Нормальное напряжение на этой грани согласно (6.38) равно

$$N = \sum_{k=1}^3 \sigma_k n_k^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma \quad (6.41)$$

(так как в главных осях касательные напряжения отсутствуют, т. е. $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Это нормальное напряжение $N = \sigma$ одинаково на всех восьми гранях октаэдра, т. е., как и в идеальных жидкостях, давление ($-\sigma$) одинаково по всем граням; но в произвольной среде на этих гранях кроме равномерного давления действует еще одинаковое по величине, но с различной ориентацией касательное напряжение τ_n , называемое *октаэдрическим напряжением*. Поскольку из (6.36) имеем на каждой грани октаэдра вектор напряжений $\mathcal{P}^{(n)}$, то

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sqrt{\mathcal{P}^{(n)^2} - N^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}. \end{aligned}$$

Напряжение τ_n , конечно, является инвариантом, так как главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — инварианты. Следовательно, его можно выразить через два первых инварианта группы (6.39) и записать в виде

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{3} \sqrt{3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (3\sigma)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2}, \quad (6.42) \end{aligned}$$

где через $\tilde{\sigma}_{ij}$ обозначены так называемые компоненты *девиатора напряжений* \tilde{D}_S :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}. \quad (6.43)$$

Его первый инвариант равен нулю, $\tilde{\sigma}_{ij}\delta_{ij} = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3 = 0$, второй, называемый квадратом модуля девиатора напряжений, равен $\tilde{\sigma}^2$, где

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \quad (6.44)$$

величины $\tau_{\alpha\beta}$ называются *главными касательными напряжениями*. Их физический смысл как экстремальных значений касательных напряжений σ_{ij} ($i \neq j$) будет выяснен. Эти напряжения равны полуразностям главных напряжений:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (6.45)$$

Третий инвариант девиатора \tilde{D}_S равен

$$|\tilde{\sigma}_{ij}| = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_3,$$

где $\tilde{\sigma}_k$ — главные компоненты \tilde{D}_S , выражающиеся формулами (6.43):

$$\tilde{\sigma}_k = \sigma_k - \sigma, \quad k = 1, 2, 3.$$

Девиатор \tilde{D}_S и два основных инварианта тензора \tilde{S} σ и $\tilde{\sigma}$ играют фундаментальную роль в МСС, так как отражают наиболее существенное отличие внутренних сил любой среды от подчиняющегося закону Паскаля давления в идеальной жидкости, которая может быть определена как среда, в которой $\sigma = -p$, $\tilde{\sigma}_k \equiv 0$.

Рассмотрим в главных осях тензора напряжений \tilde{S} произвольную площадку с нормалью $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_{i0}$, причем через \mathbf{e}_{i0} обозначим единичный репер главных осей. Вектор силы на ней имеет компоненты (6.37), причем $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $\sigma_{11} = \sigma_1$, $\sigma_{22} = \sigma_2$, $\sigma_{33} = \sigma_3$ и равен

$$P_\alpha^n \mathbf{e}_{\alpha 0} = \sigma_\alpha n_\alpha \mathbf{e}_{\alpha 0};$$

квадрат касательного напряжения, очевидно, равен

$$\tau^2 = \mathcal{F}^{(n)^2} - N^{(n)^2} = \sum_{k=1}^3 \sigma_k^2 n_k^2 - \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k n_k^2 \right)^2, \quad (6.46)$$

причем

$$\sum_{k=1}^3 n_k^2 = 1.$$

Напряжения σ_k в рассматриваемой точке фиксированы, и мы можем найти экстремум τ^2 по переменным n_k при указанном условии, т. е. найти соответствующие направления \mathbf{n} . Обозначим $n_1^2 = x$, $n_2^2 = y$, $n_3^2 = 1 - x - y$ и перепишем (6.46) в виде

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) x + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) y + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) x + (\sigma_2 - \sigma_3) y + \sigma_3]^2. \quad (6.46')$$

Условия экстремума

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} = \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} = 0, \quad n_1 \frac{\partial \tau^2}{\partial x} = n_2 \frac{\partial \tau^2}{\partial y} = 0$$

дают два уравнения

$$n_1 [\sigma_1^2 - \sigma_3^2 - 2N^{(n)} (\sigma_1 - \sigma_3)] = 0, \quad (6.47)$$

$$n_2 [\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2N^{(n)} (\sigma_2 - \sigma_3)] = 0,$$

где

$$N^{(n)} = (\sigma_1 - \sigma_3) x + (\sigma_2 - \sigma_3) y + \sigma_3. \quad (6.48)$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ величина $N^{(n)} = \sigma_3$, т. е. x, y остаются неопределенными, $\tau = \tau_{\alpha\beta} = 0$; такое состояние возможно в различных средах, но только при особенно простых внешних воздействиях. При условии

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad (6.49)$$

не ограничивающем общности рассмотрения, в (6.47) должны положить либо $n_1 = 0$, либо $n_2 = 0$, так как в противном случае получим противоречивые уравнения для $N^{(n)}$, если только $\sigma_1 \neq \sigma_2$. При $n_2^2 = y = 0$ находим из (6.47)

$$\sigma_1 + \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)x + \sigma_3] = 0,$$

откуда $x = n_1^2 = 0,5$, $n_3^2 = 1 - n_1^2 = 0,5$, т. е. искомая площадка проходит через ось e_{20} и расположена под углами 45° к e_{10} и e_{30} . На этой площадке согласно (6.46')

$$\tau^2 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}{2} + \sigma_3^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \sigma_3 \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2,$$

т. е. $\tau = \tau_{13}$ (6.45) — наибольшее касательное напряжение в рассматриваемой точке тела. Полагая теперь $n_1^2 = x = 0$ и затем $n_3^2 = 0$, найдем, что два других экстремальных напряжения равны τ_{23} , τ_{12} (6.45) и действуют на площадках, делящих пополам углы между главными плоскостями (2, 3) и (1, 2).

Наибольшее касательное напряжение, равное $\tau_{13} = \tau_{\max}$ при условии (6.49), в других случаях будет наибольшим по модулю из всех $\tau_{\alpha\beta}$ (6.45)

$$\tau_{\max} = \max \tau_{\alpha\beta}. \quad (6.50)$$

Оно определяет наибольшую силу сдвига в среде и потому может приводить к разрушениям твердых тел, изменениям режимов течения жидкостей и газов и т. п. В МСС обычно находят не только закон движения $u(x, t)$ или $v(x, t)$, но и компоненты тензора напряжений $S^{ij}(x, t)$ или $\sigma_{ij}(x, t)$ и др. Но для вычисления τ_{\max} надо вычислить главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и выбрать наибольшее из (6.45), что связано с решением и анализом корней кубического уравнения. Важным преимуществом обладает октаэдрическое напряжение τ_n (6.42) или модуль девиатора $\tilde{\sigma}$, имеющие простые выражения через σ_{ij} или $\tilde{\sigma}_{ij}$ и практически равноправные с τ_{\max} . Причина такого равноправия в первую очередь состоит в том, что с точностью до почти постоянного множителя числа τ_n и τ_{\max} или $\tilde{\sigma}$ и τ_{\max} равны между собой независимо от характера среды и процесса ее движения. Действительно, отношение, например, τ_n/τ_{\max} определяется дробью

$$z = \frac{\tau_n}{\tau_{\max}} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}}{\max |\tau_{\alpha\beta}|}, \quad (6.51)$$

причем на основании выражений (6.45)

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{2}z = \sqrt{1 + a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\max |\sigma_\alpha - \sigma_\beta|}, \quad (6.51')$$

причем $|b| < |a| < 1$, $1 + a + b = 0$; при этих условиях, как легко видеть, что z заключено в границах

$$1 \geq \frac{3z}{2\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866, \quad (6.52)$$

и, следовательно, положив $z \approx 0,878$, мы можем допустить ошибку $< 7\%$. Такая же оценка справедлива для деформаций и скоростей деформаций (5.32).

Проведенный выше анализ напряжений в точке тела, не зависящих от систем координат, тождественно переносится на теорию деформаций и частично уже был сделан в § 5. Например, главные сдвиги через главные удлинения выражаются формулами (6.45), если заменить буквы σ на ε и τ на $\gamma/2$.

Главные компоненты тензора напряжений σ_α и девиатора $\tilde{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha - \sigma$ выражаются через σ и инварианты девиатора $\tilde{\sigma}$ (6.44) и $\mathcal{J}_3 = \det(\tilde{\sigma}_{ij})$ формулами Кардано для корней кубического уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma &= \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{\sigma} \cos \frac{\varphi}{3}, \\ \sigma_2 - \sigma &= \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{\sigma} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right), \\ \sigma_3 - \sigma &= \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{\sigma} \cos \left(\frac{\varphi + 4\pi}{3} \right), \end{aligned} \quad (6.53)$$

косинус угла вида напряженного состояния $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ определяется формулой

$$0 \leq -\cos \varphi = 3 \sqrt{\frac{2}{3}} \det \tilde{\sigma}_{ij} / \tilde{\sigma}^3 \leq 1. \quad (6.54)$$

Эти выражения справедливы для любого симметричного тензора второго ранга.

§ 7. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Постановки и решения задач МСС часто упрощаются при замене декартовых координат $x(x^1, x^2, x^3)$ криволинейными.

Введем криволинейную систему координат q^i , $i=1, 2, 3$, взаимно однозначно связанную с ортогональной декартовой системой координат (x^i или x_i) эйлера пространства

$$q^i = q^i(x), \quad x = x(q^i); \quad (7.1)$$

базис и метрический тензор ее выражаются формулами

$$\mathbf{q}_i(q) = \partial \mathbf{x} / \partial q^i = C_i^m \mathbf{e}_m, \quad q_{ij}(q) = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = C_i^m C_j^m, \quad (7.2)$$

$$q^{ij} q_{jm} = \delta_m^i, \quad \mathbf{q}^i = \mathbf{q}_j q^{ij}.$$

Если производные векторов базиса $\partial \mathbf{q}_i / \partial q^j$ представим подобно (5.1) в виде

$$\partial \mathbf{q}_i / \partial q^j = \gamma_{ij}^m \mathbf{q}_m = \gamma_{ij,m} \mathbf{q}^m, \quad \gamma_{ij}^m = \gamma_{ij,k} q^{km}, \quad (7.3)$$

то получим подобно (5.4)

$$\gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial q_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial q_{ij}}{\partial q^k} \right), \quad (7.4)$$

т. е. найдем $\gamma_{ij,k}$ и γ_{ij}^k как функции координат q^i .

Различные системы криволинейных координат бывают удобны для решения частных задач в зависимости от формы области, занятой телом. Например, для области, имеющей при любом t форму цилиндра, ограниченного перпендикулярными оси плоскостями, удобны цилиндрические координаты:

$$q^1 = r, \quad q^2 = \varphi, \quad q^3 = z, \quad d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

для которых отличные от нуля метрические параметры равны

$$q_{11} = q_{33} = 1, \quad q_{22} = r^2,$$

$$q^{11} = q^{33} = 1, \quad q^{22} = 1/r^2,$$

$$\gamma_{22,1} = -r, \quad \gamma_{12,2} = \gamma_{21,2} = r, \quad \gamma_{12}^2 = \gamma_{21}^2 = 1/r, \quad \gamma_{22}^1 = -r.$$

В § 6 введен тензор напряжений \tilde{S} с компонентами S^{ij} в криволинейных лагранжевых координатах x^i и компонентами σ_{ij} , являющимися истинными напряжениями в декартовых координатах x^i эйлера пространства; при этом \mathbf{x} и \mathbf{x} связаны законом движения (3.22) или (3.23)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Сохраним прежние обозначения для соответствующих реперов, метрических тензоров (§ 4)

$$\mathbf{a}_i = A_i^k \mathbf{e}_k, \quad g_{ij} = A_i^k A_j^k,$$

$$\mathbf{a}^i = B_k^i \mathbf{e}_k, \quad g^{ij} = B_k^i B_k^j$$

и символов $\Gamma_{ij,k}$, Γ_{ij}^k , выражающихся формулами (5.2), (5.4) через метрический тензор g_{ij} . При этих условиях все результаты и формулы, полученные ранее, сохраняются.

Для одной и той же физической точки тензор напряжений \tilde{S} с компонентами σ^{ij} в эйлеровых декартовых координатах x^i и компонентами S^{ij} в лагранжевых координатах x^i (при $t > t_0$ являющихся криволинейными) — один и тот же физический объект. Это значит, что на одной и той же площадке с единичной нормалью $\mathbf{v} = \mathbf{n}$, представленной в реперах \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_i ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}, \quad v_i = v \mathbf{e}_i, \quad n_i = n \mathbf{e}_i, \quad (7.5)$$

физические векторы истинных напряжений $\mathbf{P}^{(v)}$ (6.8) и $\mathcal{P}^{(n)}$ (6.36) тождественны:

$$\mathcal{P}^{(n)} = \sigma^i n_i = \sigma^{ij} n_j \mathbf{e}_j = \mathbf{P}^{(v)} = S^i v_i = S^{ij} v_j \mathbf{e}_j. \quad (7.6)$$

Отсюда и были получены формулы

$$\sigma^{ij} = S^{mn} A_m^i A_n^j, \quad S^{ij} = \sigma^{mn} B_m^i B_n^j. \quad (7.7)$$

Все выписанные величины могут быть выражены как функциями \mathbf{x} , так и \mathbf{x} .

В рассматриваемой физической точке (\mathbf{x}) , $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}, t)$ в момент t новая криволинейная система координат (q^i) , определяемая уравнением (7.1), имеет характеристики, даваемые формулами (7.2) — (7.4); причем сами координаты q^i имеют выражения

$$q^i = q^i(\mathbf{x}) = q^i(\varphi(\mathbf{x}, t)). \quad (7.8)$$

Направление нормали к координатной площадке, построенной на векторах $(d\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{q}_\alpha dq^\alpha$ и $(d\mathbf{x})_\beta = \mathbf{q}_\beta dq^\beta$, определяется единичной нормалью $(\lambda)_\gamma$:

$$(\lambda)_\gamma = \frac{q^\gamma}{|q^\gamma|} = \frac{q^\gamma}{\sqrt{g^{\gamma\gamma}}}.$$

Все рассуждения начала § 6 относительно представления тензора напряжений \tilde{S} на косоугольной площадке с единичной нормалью \mathbf{v} , которую теперь обозначим

$$\lambda = \mathbf{v} = \mathbf{n}, \quad (7.9)$$

можно повторить, но компоненты \tilde{S} в репере \mathbf{q}_i будут отличны от S^{ij} , $\sigma^{ij} = \sigma_{ij}$ и других введенных в § 6; обозначим контравариантные компоненты тензора \tilde{S} в репере \mathbf{q}_i через Q^{ij} . Тогда формулы (6.8), (6.9) для вектора истинного напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{v} = \lambda$ переписутся в виде

$$\mathcal{P}^{(v)} = Q^i \lambda_i, \quad Q^i = Q^{ij} q_j, \quad \text{причем } \lambda_i = \lambda q_i = n q_i. \quad (7.10)$$

Заметим, что при $\mathbf{n}=\mathbf{v}=\boldsymbol{\lambda}$ ковариантные компоненты их в реперах \mathbf{e}_i , \mathbf{a}_i , \mathbf{q}_i , обозначаемые n_i , v_i и λ_i , различны, почему и приходится одну и ту же единичную нормаль обозначать различными буквами. Это относится ко всем векторным и тензорным величинам. После приобретения навыков при расчетах и выкладках необходимость различных обозначений отпадает.

Физический смысл компонент Q^j и Q^{ij} тензора \mathcal{S} устанавливается формулами (7.10), так как $\mathcal{P}^{(\lambda)}$ — физическая величина, обозначающая вектор истинного напряжения на единичной физической площадке с единичной нормалью $\boldsymbol{\lambda}$. Для одной и той же косой площадки, т. е. при условии (7.9), вектор $\mathcal{P}^{(\lambda)} = \mathbf{P}^{(v)} = \mathcal{F}^{(n)}$, т. е.

$$\mathcal{F}^{(\lambda)} = Q^i \lambda_i = Q^{ij} \lambda_i q_j = S^i v_i = S^{ij} v_i a_j = \sigma^i n_i = \sigma^{ij} n_i e_j, \quad (7.11)$$

где $\sigma^i = \sigma_i$. Эти соотношения и есть основа для преобразования координатных векторов (Q^i, S^i, σ^i) и компонент одного и того же тензора напряжений \mathcal{S} при переходе от одной координатной системы к другой.

Если какой-нибудь другой тензор $\tilde{\mathcal{Z}}$ обладает свойствами, аналогичными \mathcal{S} (т. е. для заданного в некоторой точке направления внутри среды ($\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{v}=\mathbf{n}$) в трех рассматриваемых системах координат характеризует вектор $\mathbf{z}^{(v)} = \mathbf{z}^{(\lambda)} = \mathbf{z}^{(n)}$, который, например, в системе координат q^i имеет выражение $\mathbf{z}^{(\lambda)} = z^i \lambda_i$, $\mathbf{z}^i = z^{ij} q_j$, где z^{ij} не зависят от направления $\boldsymbol{\lambda}$, то для компонент тензора $\tilde{\mathcal{Z}}$ будут справедливы соотношения (7.11) при замене $\mathcal{P} \rightarrow \mathbf{z}$, $Q^{ij} \rightarrow z^{ij}$, $Q^i \rightarrow z^i$ и т. д. и при соответствующих обозначениях компонент $\tilde{\mathcal{Z}}$ в реперах \mathbf{a}_i и \mathbf{e}_i .

Чтобы найти выражение вектора σ^i и компонент σ^{ij} через \mathcal{S} , S^{ij} и Q^i , Q^{ij} , направим нормаль $\mathbf{n}=\mathbf{v}=\boldsymbol{\lambda}$ по координатному вектору $\mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_\gamma = \mathbf{e}_\alpha$ репера (\mathbf{e}_i) , т. е. положим $(\mathbf{n})^\alpha = \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}_\alpha$. Получим

$$n_i = (\mathbf{n})^\alpha \mathbf{e}_i = \delta_i^\alpha, \quad v_i = (\mathbf{n})^\alpha \mathbf{a}_i = \partial x^\alpha / \partial x^i, \quad \lambda_i = (\mathbf{n})^\alpha \mathbf{q}_i = \partial x^\alpha / \partial q^i,$$

из (7.10), (7.11)

$$\sigma^\alpha = A_i^\alpha S^i = C_i^\alpha Q^i, \quad (7.12)$$

и потому

$$\sigma^{kl} = A_i^k A_j^l S^{ij} = C_i^k C_j^l Q^{ij}, \quad (7.13)$$

Чтобы найти выражение Q^{ij} через σ_{ij} и S^{ij} , а также S^{ij} через σ^{ij} и Q^{ij} , вводятся обратные относительно A_j^i и C_j^i матрицы

$$A_j^i B_i^k = \delta_j^k, \quad C_j^i D_i^k = \delta_j^k, \quad (7.14)$$

определяемые этими уравнениями. Умножая (7.13) на $D_k^m D_l^n$, получим

$$Q^{mn} = \sigma^{kl} D_k^m D_l^n = S^{ij} A_j^k A_i^l D_k^m D_l^n. \quad (7.15)$$

Вспомним, что закон движения частицы (3.23) задает еще базис $\epsilon_i = \partial x / \partial x^i$, определяемый аффинором $B = \partial x / \partial x$ обратным A , так что

$$\epsilon_i = \frac{\partial x}{\partial x^i} = B_i^k \epsilon_k, \quad B_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i}, \quad \epsilon_i A_i^l = \delta_i^l. \quad (7.16)$$

Соответствующий ему метрический тензор G_{ij} и контравариантные базис ϵ^i и тензор G^{ij} , а также символы Кристофеля \mathcal{T} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \epsilon_i \epsilon_j = B_i^k B_j^l G_{kl}, \quad G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i, \\ \epsilon^i &= A_m^i \epsilon_m, \quad G^{ij} = \epsilon^i \epsilon^j = A_m^i A_n^j G^{mn}, \\ \mathcal{T}_{ij,k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial G_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Тензор напряжений S можем представить, конечно, и в базисе ϵ_i , обозначив его компоненты через Σ^i , Σ^{ij} , вектор напряжения на площадке с единичной нормалью κ — через $\mathcal{P}^{(\kappa)}$, так что

$$\mathcal{P}^{(\kappa)} = \Sigma^i \kappa_i = \Sigma^{ij} \kappa_i \epsilon_j.$$

Рассматривая во всех реперах $(\epsilon_i, \vartheta_i, q_i, E_i)$ одну и ту же физическую площадку с единичной нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa}$, т. е. перенеся к ней параллельно (без вращения) все эти реперы, получим условия (7.11), к которым присоединится еще одно

$$\sigma^i n_i = \Sigma^i \kappa_i = \Sigma^{ij} \kappa_i \epsilon_j. \quad (7.18)$$

Совместим $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{n} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda}$ с единичным вектором нормали к площадке, образованной векторами E_β, E_γ , т. е. положим

$$\boldsymbol{\kappa} = E^\alpha / \sqrt{G^{\alpha\alpha}}.$$

Тогда

$$n_i = \boldsymbol{\kappa} \epsilon_i = A_i^\alpha / \sqrt{G^{\alpha\alpha}}, \quad \kappa_i = \boldsymbol{\kappa} \epsilon_i = \delta_i^\alpha / \sqrt{G^{\alpha\alpha}};$$

из (7.18) получим

$$\sigma^{il} A_i^\alpha \epsilon_l = \Sigma^{\alpha j} \epsilon_j.$$

Отсюда, умножая на E^β , учитывая (7.17), найдем

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{il} A_i^\alpha A_j^\beta. \quad (7.19)$$

Тензор деформаций $\tilde{\epsilon}$ до сих пор был представлен только компонентами ϵ_{ij} , которые выражаются формулами (4.49) через век-

тор перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}$, причем использованы декартовы компоненты $u_i(\mathbf{x}, t)$, или, что то же, $u^i(\mathbf{x}, t)$:

$$2e_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \frac{\partial u_k}{\partial x^j}. \quad (7.20)$$

Вектор-волокно $d\mathbf{x}$ можно представить через его компоненты в любой из трех рассмотренных выше систем координат x^i , x^i и q^i , так как все они связаны с законом движения и преобразованием (7.1):

$$\begin{aligned} \xi &= d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} dq^i = \\ &= \mathbf{e}_i dx^i = \mathbf{e}_i dx^i = \mathbf{e}_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{e}_k C_i^k dq^i. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\rho = d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{e}_i dx^i = \mathbf{e}_i dx^i = \mathbf{q}_i dq^i.$$

Составляя разность $d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{x}^2 = \rho^2 - \xi^2$, получим

$$\begin{aligned} \rho^2 - \xi^2 &= 2e_{ij} dx^i dx^j = 2E_{ij} dx^i dx^j = 2\eta_{ij} dq^i dq^j, \\ e_{ij} &= E_{mn} A_i^m A_j^n, \quad \eta_{ij} = E_{mn} C_i^m C_j^n, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где обозначены компоненты тензора деформации $\tilde{\epsilon}$ в различных системах координат:

$$\begin{aligned} 2e_{ij} &= g_{ij} - \delta_{ij} \text{ в } \mathbf{x}; \\ 2E_{ij} &= \delta_{ij} - G_{ij} \text{ в } \mathbf{x}, \\ 2\eta_{ij} &= q_{ij} - G_{mn} C_i^m C_j^n \text{ в } \mathbf{q}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Все эти компоненты обращаются в нуль при $t = t_0$, так как согласно начальному условию $t = t_0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}$, и потому $g_{ij} = G_{ij} = \delta_{ij}$, а на основании (7.2) $C_i^k C_j^k = q_{ij}$.

Перемещение точки \mathbf{x} в момент t

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_s \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{q}, t) \quad (7.23)$$

можно представить через декартовы компоненты $u_s^i(\mathbf{x}, t)$ и компоненты $U^i(\mathbf{q}, t)$ в репере \mathbf{q}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U^i \mathbf{q}_i = U_i \mathbf{q}^i = u_s^i \mathbf{e}_i = \mathbf{u}, \\ u_s^i(\mathbf{x}, t) &= u^i(\mathbf{x}(\mathbf{x}, t), t) = x^i - v^i(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Для $E_{ij}(\mathbf{x}, t)$ имеем из (7.22), (7.17) *

$$2E_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{\partial u^m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j}. \quad (7.24)$$

Компоненты U^i , U_i вектора \mathbf{U} предполагаются заданными в криволинейных координатах (q^i), следовательно, выражения η_{ij} будут связаны с дифференцированием U^i , U_i по q^i . По определению (7.21), в котором $\mathbf{p} = \mathbf{q}_i dq^i$ и согласно (7.23) $\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{x} = \mathbf{p} - d\mathbf{U}$, причем $d\mathbf{U} = (\partial \mathbf{U} / \partial q^i) dq^i$, находим

$$2\eta_{ij} = \mathbf{q}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^j} + \mathbf{q}_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^j}, \quad (7.25)$$

где $\mathbf{U} = U^i \mathbf{q}_i = U_i \mathbf{q}^i$. Поскольку на основании (7.3)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} (U^m \mathbf{q}_m) = \frac{\partial U^m}{\partial q^i} \mathbf{q}_m + U^m \frac{\partial \mathbf{q}_m}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial U^m}{\partial q^i} + U^m \gamma_{mi}^n \right) \mathbf{q}_n,$$

то, обозначая ковариантную производную контравариантного вектора (U^m), точнее, контравариантной компоненты вектора \mathbf{U} в базисе \mathbf{q}_i ,

$$\nabla_i U^m \equiv \frac{\partial U^m}{\partial q^i} + U^n \gamma_{ni}^m, \quad (7.26)$$

получим выражения частных производных вектора

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q^i} = \nabla_i U^m \mathbf{q}_m. \quad (7.27)$$

Замечательная особенность ковариантной производной — свойство свертки с метрическим тензором q_{mi} . Если обозначить ковариантную производную ковариантного вектора (точнее, ковариантной компоненты)

$$\nabla_i U_i \equiv \frac{\partial U_i}{\partial q^i} = U_n \gamma_{in}^i, \quad (7.28)$$

то

$$\begin{aligned} q_{mi} \nabla_i U^m &= \nabla_i (U^m q_{mi}) = \nabla_i U_i, \\ q^{mi} \nabla_i U_i &= \nabla_i (U_i q^{mi}) = \nabla_i U^m. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Базисные векторы \mathbf{q}_i , \mathbf{q}^i при ковариантном дифференцировании также подобны константам.

* Индекс ε в u_ε^i опускаем, так как при дифференцировании по \mathbf{x} ясно, что $u_\varepsilon^i = u^i(\mathbf{x}, t)$.

Внося (7.27) в (7.25), получим искомые выражения компонент тензора деформаций $\tilde{\epsilon}$ в любых криволинейных координатах (q^i) через компоненты вектора перемещения U в этих же координатах:

$$2\eta_{ij} = \nabla_i U_j + \nabla_j U_i - \nabla_i U_m \nabla_j U^m, \quad \eta_{ij} = \eta_{ji}. \quad (7.30)$$

Если какой-нибудь контравариантный вектор, например вектор напряжения Q^m , определен в репере q_i выражением $Q^m = Q^{mn} q_n$, то ковариантной производной его по аналогии с (7.26) называется выражение

$$\nabla_i Q^m = \frac{\partial Q^m}{\partial q^i} + Q^k \gamma_{ik}^m. \quad (7.31)$$

Внося сюда $Q^m = Q^{mn} q_n$, получим

$$\nabla_i Q^m = \nabla_i (Q^{mn} q_n) = q_n \nabla_i Q^{mn}, \quad (7.32)$$

где $\nabla_i Q^{mn}$ — ковариантная производная контравариантного тензора:

$$\nabla_i Q^{mn} = \frac{\partial Q^{mn}}{\partial q^i} + Q^{ln} \gamma_{ij}^m + Q^{mj} \gamma_{ij}^n. \quad (7.33)$$

Закон движения при $t = \text{const}$ можно рассматривать как одно из преобразований типа (7.1), причем компоненты σ^i , σ^{ij} тензора \tilde{S} в ортогональном репере e_i в точке x преобразуются в S^i , S^{ij} в репере \mathfrak{e}_i , имеющем характеристики g_{ij} , Γ_{ij}^k . Заменяя q^i на x^i , q_i на \mathfrak{e}_i , q_{ij} на g_{ij} , γ на Γ и считая U^i , U_i компонентами вектора U в репере \mathfrak{e}_i :

$$U = U^i(x, t) \mathfrak{e}_i = U_i(x, t) \mathfrak{e}^i, \quad (7.34)$$

получим выражение компонент η_{ij} тензора деформаций $\tilde{\epsilon}$ в виде (7.30) и выражения ковариантных производных компонент S^i , S^{ij} тензора напряжений \tilde{S} в репере \mathfrak{e}_i по криволинейным координатам x^i :

$$\begin{aligned} \nabla_i S^m &= \frac{\partial S^m}{\partial x^i} + S^k \Gamma_{ik}^m = \mathfrak{e}_n \nabla_i S^{mn}, \\ \nabla_i S^{mn} &= \frac{\partial S^{mn}}{\partial x^i} + S^{ln} \Gamma_{ij}^m + S^{mj} \Gamma_{ij}^n. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Компоненты $v^i(x, t)$, или $v_i(x, t)$, вектора скорости частицы \mathbf{v} в эйлеровом пространстве в декартовых координатах x^i и компоненты v_{ij} тензора скорости деформаций \tilde{V} (§ 5) имеют выражения

$$2v_{ij} = \partial v_i / \partial x^j + \partial v_j / \partial x^i, \quad (7.36)$$

а вектор ускорения имеет выражение

$$\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + v^i \partial\mathbf{v}/\partial x^i. \quad (7.37)$$

Согласно (7.1), (7.2) репер \mathbf{q}_i неподвижен в точке $\mathbf{x} = \text{const}$ пространства наблюдателя, но вектор скорости $\mathbf{v} = \mathbf{V}_s$ в силу закона движения $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}, t)$ меняется по t . Для частицы $\mathbf{x} = \text{const}$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_s(\mathbf{q}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial q^i}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= v^i \mathbf{e}_i = \mathbf{V}_s = V_s^i(q, t) \mathbf{q}_i(q), \\ V_s^i(q) &= \dot{q}^i = \left[\frac{\partial}{\partial t} q^i(\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)) \right]_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow q}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Следовательно,

$$\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t} (V_s^m \mathbf{q}_m) + (V_s^i \nabla_i V_s^m) \mathbf{q}_m,$$

или окончательно получаем выражение ускорения в точке $\mathbf{x} = \text{const}$ в криволинейных координатах (q^i):

$$\mathbf{w}(q, t) = \left(\frac{\partial V_s^i}{\partial t} + V_s^j \nabla_j V_s^i \right) \mathbf{q}_i. \quad (7.39)$$

Пусть теперь $\mathbf{v} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ — вектор ускорения имеют компоненты V^i , w^i в базисе \mathbf{e}_i лагранжевых координат (\mathbf{x})

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = v^i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i = \mathbf{V} = V^i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i(\mathbf{x}, t) = V_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}^i(\mathbf{x}, t); \\ \mathbf{w} &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = w^i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i(\mathbf{x}, t) = w_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}^i(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Найдем выражение ускорения через скорости V_i , V^i . Отличие от предыдущего состоит в том, что базис \mathbf{q}_i был неподвижным в пространстве наблюдателя, базис же \mathbf{e}_i подвижный. Находим

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(V^i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial V^i}{\partial t} \mathbf{e}_i + V^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \\ &= \frac{\partial V^i}{\partial t} \mathbf{e}_i + V^i \frac{\partial}{\partial x^i} (V^k \mathbf{e}_k) \end{aligned}$$

и, следовательно, имеем выражение

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^n \nabla_n V^i \right) \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \mathbf{e}_i,$$

$$w^i = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^n \nabla_n V^i, \quad (7.41)$$

которое совпадает с (7.39) при замене q_i на ϑ_i и γ_{ij}^k на Γ_{ij}^k .

Найдем выражение производной по времени от тензора деформации $\tilde{\mathbf{e}}$, выраженного компонентами деформации e_{ij} :

$$2e_{ij}(\mathbf{x}, t) = g_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^j} - \delta_{ij} \quad (7.42)$$

через компоненты вектора скорости (7.40). Получим для фиксированной частицы $\mathbf{x} = \text{const}$ в репере \mathbf{e}_i :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \vartheta_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} + \vartheta_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \vartheta_i \vartheta^k \nabla_j V_k + \vartheta_j \vartheta^k \nabla_i V_k = \\ &= \nabla_j V_i + \nabla_i V_j = 2V_{ij}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (7.43)$$

где введено обозначение $V_{ij}(\mathbf{x}, t)$; или в репере \mathbf{e}_i :

$$2 \frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i}.$$

Рассматривая здесь \mathbf{v} представленным в репере \mathbf{e}_i как функцию (\mathbf{x}, t) на основании закона движения $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, т. е. полагая $\mathbf{v} = v^m(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_m$, получим с учетом представления $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ (§ 5)

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \\ &= \frac{\partial v^m}{\partial x^k} (A_i^m A_j^k + A_j^m A_i^k) = (v_{mk} + \omega_{mk}) (A_i^m A_j^k + A_j^m A_i^k), \end{aligned} \quad (7.44)$$

где ω_{mk} — компоненты вихря. Вследствие симметрии $v_{mk} = v_{km}$ и антисимметрии $\omega_{mk} = -\omega_{km}$ получим с учетом (7.43)

$$2V_{ij}(\mathbf{x}, t) = 2 \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = 2v_{mh}(\mathbf{x}, t) A_i^h A_j^m. \quad (7.45)$$

Но согласно (7.21) правая часть этого равенства представляет преобразование декартовых компонент $v_{mh}(\mathbf{x}, t)$ тензора $\tilde{\mathbf{V}}$ к компонентам в лагранжевых координатах. Следовательно, $V_{ij}(\mathbf{x}, t)$ (7.43) дают выражения компонент тензора скорости деформации в лагранжевых координатах.

Из (7.13), (7.21), (7.45) следуют равенства

$$\begin{aligned} \sigma^{kl} E_{kl} &= S^{mn} \varepsilon_{mn} = Q^{ii} \eta_{ij}, \\ \sigma^{kl} v_{kl} &= S^{mn} V_{mn} = Q^{ii} V_{ij}^*, \end{aligned} \quad (7.46)$$

где V_{ij}'' — компоненты тензора скорости деформации, выражающиеся с помощью тензора q_{ij} через ковариантные компоненты вектора скорости $V_i^* = vq_i$ в репере q_i формулами (7.43)

$$2V_{ij}^*(q, t) = \nabla_i V_j^* + \nabla_j V_i^*.$$

Таким образом, построенные на основе цепочек (7.11), (7.21) тензоры напряжений и деформаций представляют сопряженные в смысле Лагранжа пары обобщенных сил и перемещений.

Глава III

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§ 8. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Основы аксиоматики МСС изложены в § 3, причем установлено, что произвольная часть среды, заключенная в объеме V и ограниченная поверхностью Σ , в любое мгновение t находится в динамическом равновесии в смысле Даламбера: сумма всех массовых сил (включая силы инерции) и сил, действующих на поверхности Σ , равна нулю. Если плотность среды ρ , массовая сила \mathbf{F} и ускорение каждой частицы \mathbf{w} в момент t известны, то объемная сила, действующая на массу в объеме dV , равна $\rho(\mathbf{F} - \mathbf{w})dV$; эта сила, проинтегрированная по объему V , в сумме с проинтегрированной по поверхности Σ силой $\mathbf{P}^{(\nu)}d\Sigma$, действующей на площадку $d\Sigma$ с нормалью \mathbf{v} на Σ , равна нулю. Значит, при составлении уравнения движения среду в объеме V можно считать «замороженной», т. е. считать ее абсолютно твердым телом, на внутренний единичный объем которого действует объемная сила $\rho(\mathbf{F} - \mathbf{w})$, а на поверхности — распределенный вектор силы с плотностью $\mathbf{P}^{(\nu)}$ на единицу площади. Поэтому в векторной форме уравнение движения массы любого объема V с соответствующей поверхностью Σ имеет вид

$$\int_V \rho(\mathbf{F} - \mathbf{w}) dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P}^{(\nu)} d\Sigma = 0 \quad (8.1)$$

в любой системе координат. Эта система может быть криволинейной, неподвижной в пространстве наблюдателя или движущейся и деформирующейся лагранжевой, может быть вообще как угодно движущейся и деформирующейся во времени, если силы $\rho\mathbf{F}$, — $\rho\mathbf{w}$ заданы в инерциальной системе. Но если не задать метрического тензора и базиса координатной системы, а также вектора $\mathbf{P}^{(\nu)}$ в виде линейной функции нормали \mathbf{v} (7.6), то из (8.1) нельзя получить дифференциальных уравнений движения.

Для определенности сначала рассмотрим уравнение движения среды в базисе \mathbf{e}_i лагранжевой системы координат (x^i) с метрическим тензором g_{ij} и символами Кристоффеля Γ_{ij}^k . Вектор силы $\mathbf{P}^{(\nu)}$ в нем имеет выражение

$$\mathbf{P}^{(\nu)} = S^i \mathbf{v}_i = S^i v_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v} \mathbf{e}_i. \quad (8.2)$$

По теореме Грина — Остроградского

$$\int_{\Sigma} S^i v_i d\Sigma = \int_V \triangleright_i S^i dV, \quad (8.3)$$

и потому из (8.1) получаем для любого объема V , взятого внутри области движения среды,

$$\int_V [\rho (F - w) + \nabla_i S^i] dV = 0 \quad (8.4)$$

и, следовательно, получаем дифференциальное уравнение движения в векторной форме

$$\rho (w - F) = \nabla_i S^i = \frac{\partial S^i}{\partial x^i} + S^n \Gamma_{ni}^i. \quad (8.5)$$

Отметим справедливую в любой криволинейной системе координат формулу Вейла ($g = |g_{ij}|$, $q = |q_{ij}|, \dots$):

$$\delta_i^j \Gamma_{nj}^i = \Gamma_{ni}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^n}, \quad \delta_i^j \gamma_{nj}^i = \gamma_{ni}^i = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\partial \sqrt{q}}{\partial q^n}, \dots, \quad (8.6)$$

на основании которой свертка ковариантной производной вектора напряжения S^i (и любого вектора) записывается в виде

$$\nabla_i S^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} S^i), \quad \nabla_i Q^i = \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\partial}{\partial q^i} (\sqrt{q} Q^i) \dots \quad (8.7)$$

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$\rho (w - F) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g} S^m) = \nabla_m S^m = \text{div } \tilde{S}, \quad (8.8)$$

сохраняющийся в любой криволинейной системе координат, если определитель g , производная ∇_m и вектор S^m взяты в этой системе. Выражение, стоящее в правой части уравнения (8.8), не зависит от системы координат и представляет вектор, называемый *дивергенцией тензора напряжений* \tilde{S} .

Специфика лагранжевой криволинейной системы координат (x^i) состоит в том, что при $t = t_0$ она является декартовой, т. е. при $t = t_0$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g = |g_{ij}| = 1$ и закон сохранения массы имеет вид $\rho \sqrt{g} = \rho_0$ (§ 4, 5). В этой системе координат уравнение движения принимает вид

$$\rho_0 (w - F) = \frac{\partial}{\partial x^m} (\sqrt{g} S^m). \quad (8.9)$$

В репере e_i , в котором $w = \ddot{x} - \ddot{x}^i e_i$, $F = X^i e_i$, и с учетом выражения (6.22) компонент условных напряжений ($A = \sqrt{g}$)

$$S^m = S^{mn} \partial_n = t^m / A = t^{mn} e_n / A, \quad (8.10)$$

уравнения движения будут

$$\rho_0 (\ddot{x} - X) = \frac{\partial}{\partial x^m} (AS^m) = \frac{\partial t^m}{\partial x^m}; \quad (8.11)$$

$$\rho_0 (\ddot{x}^i - X^i) = \frac{\partial}{\partial x^m} (AS^{mj} A_j^i) = \frac{\partial t^{mj}}{\partial x^m},$$

здесь:

$$x = x + u, \quad \ddot{x} = \ddot{u}, \quad A_j^i = \delta_j^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j}, \quad (8.11')$$

причем $u(x, t)$ — вектор перемещения. Эти уравнения связывают между собой закон движения $\ddot{x} = \ddot{x}(x, t)$ и тензор напряжений, выраженный его компонентами $S^{ij} = S^{ji}$ или t^{mn} , так как силы $X^i(x, t)$ считаются заданными; определитель A выражает плотность

$$\rho_0/\rho = A = |A_j^i|. \quad (8.12)$$

В эйлеровых декартовых координатах (x^i) метрический тензор равен δ_{ij} , символы Кристоффеля равны нулю, тензор напряжения S определяется вектором истинных напряжений (§ 6) $\sigma^i = \sigma^{ij} e_j$; заменяя в (8.8) $g \rightarrow 1$, $S^i \rightarrow \sigma^i$, $x^m \rightarrow x^m$ и ускорение w на $dv(x, t)/dt$, получим динамические уравнения Эйлера—Коши:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} - F \right) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v^i \frac{\partial v}{\partial x^i} - F \right) = \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i}, \quad (8.13)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho X^i.$$

К динамическим уравнениям в эйлеровом пространстве следует присоединить закон сохранения массы (3.5), § 5

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (8.14)$$

и часто используемое в гидродинамике тождество Громеко—Лемба, дающее новую форму представления ускорения

$$w = \frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - v \times \operatorname{rot} v. \quad (8.15)$$

Вводя вместо тензора напряжений девиатор напряжений \tilde{D}_S и среднее гидростатическое давление (§ 6) $3p = -\sigma^{ij} \delta_{ij} = -3\sigma$, преобразуем (8.13) к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - F = v \times \operatorname{rot} v + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tilde{D}_S. \quad (8.16)$$

то динамическое уравнение Эйлера—Коши и уравнение сохранения массы принимают простой вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad \mathbf{F} = -\text{grad } \mathcal{F},$$

то динамическое уравнение Эйлера—Коши и уравнение сохранения массы принимают простой вид

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P(p) + \mathcal{F} \right) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{div } \tilde{D}_S, \quad (8.16')$$

$$\text{div } \mathbf{v} + \frac{d}{dt} \ln \rho(P) = 0.$$

В произвольных криволинейных координатах q^i , связанных с x^i заданными соотношениями (7.1) и, значит, неподвижных в эйлеровом пространстве, уравнение движения получается из (8.8) заменой $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{q}_i$, $g_{ij} \rightarrow q_{ij}$, $g \rightarrow q = |q_{ij}|$, $\Gamma_{ij}^k \rightarrow \gamma_{ij}^k$, $\mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{Q}^i$, в результате чего

$$\rho \sqrt{q} (\mathbf{w} - \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial q^m} (\sqrt{q} \mathbf{Q}^m) = \sqrt{q} \nabla_m \mathbf{Q}^m. \quad (8.17)$$

Компоненты ускорения в репере \mathbf{q}_i даны формулой (7.39), компоненты \mathbf{F} обозначим $F^i = \mathbf{F} \mathbf{q}^i$, компоненты вектора напряжения \mathbf{Q}^m определяются выражением $\mathbf{Q}^m = Q^{mn} \mathbf{q}_n$; производные

$$\begin{aligned} \nabla_m \mathbf{Q}^m &= \nabla_m Q^{mn} \mathbf{q}_n, \\ \nabla_m Q^{mn} &= \frac{\partial Q^{mn}}{\partial q^m} + Q^{mi} \gamma_{im}^n + Q^{ni} \gamma_{im}^m. \end{aligned}$$

Умножая (8.17) на \mathbf{q}^i , получим уравнения

$$\rho \omega^i \equiv \rho \left(\frac{\partial V^i}{\partial t} + V^i \nabla_j V^j \right) = \nabla_j Q^{ij} + \rho F^i, \quad (8.17')$$

где $V^i(q, t)$ — контравариантные компоненты вектора скорости $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{V}(q, t) = V^i \mathbf{q}_i$.

На основании уравнения движения получаются общие теоремы о движении конечной физической массы m_g объема V_g сплошной среды и массы в фиксированном объеме V эйлера пространства.

Умножая обе части уравнения (8.13), записанного для точки \mathbf{x} , на $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ и интегрируя по объему $V = V_g$, получим

$$\int_{V_g} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V_g} \rho \mathbf{F} dV + \int_{V_g} \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i} dV = \int_{V_g} \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma_g} \sigma^i n_i d\Sigma, \quad (8.18')$$

где $\mathbf{n} = \nu$ — нормаль к поверхности Σ_g рассматриваемого объема,

n_i — ее косинусы с декартовыми осями x^i , причем $\sigma^i n_i = \mathbf{P}^{(v)}$ — вектор напряжения на поверхности. Учитывая возможность перехода к лагранжевой системе, на основании закона сохранения массы $\rho dV = \rho_0 \sqrt{g} dV_0 = \rho_0 dV_0 = dm_0$ получим

$$\int_{V_g} \frac{dv}{dt} \rho dV = \int_{V_g^0} \frac{dv}{dt} \rho_0 dV_0 = \frac{d}{dt} \int_{V_g^0} v \rho_0 dV_0 = \frac{d}{dt} \int_{V_g} \rho v dV.$$

Следовательно, из (8.18') получаем теорему об изменении количества движения массы m_g :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int_{V_g} \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma_g} \mathbf{P}^{(v)} d\Sigma, \quad \mathbf{Q} = \int_{V_g} \rho \mathbf{v} dV. \quad (8.18)$$

Отметим вытекающее из (8.14) тождество для любой функции $z(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho \frac{dz}{dt} = \frac{\partial(\rho z)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i z) = \frac{\partial(\rho z)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} z). \quad (8.19)$$

Применительно к неподвижному объему V с поверхностью Σ в эйлеровом пространстве, заменяя в (8.18') $V_g \rightarrow V$, $\Sigma_g \rightarrow \Sigma$ и учитывая тождество, получим другой вид теоремы:

$$\int_{\Sigma} \rho v^i n_i v d\Sigma + \int_V \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P}^{(v)} d\Sigma. \quad (8.20)$$

В случае установившегося движения среды пропадает второй член левой части уравнения, и при отсутствии массовых сил ($\mathbf{F} = 0$) в виде

$$\int_{\Sigma} (\rho v^i n_i v - \mathbf{P}^{(v)}) d\Sigma = 0 \quad (8.20')$$

эта теорема имеет многочисленные приложения для оценок сил и скоростей.

Для фиксированной массы среды в объеме V_g теорему о моменте количества движения получаем в виде

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \int_{V_g} \mathbf{F} \times \mathbf{x} \rho dV + \int_{\Sigma_g} \mathbf{P}^{(n)} \times \mathbf{x} d\Sigma, \quad (8.21)$$

где кинетический момент массы m_g

$$\mathbf{G} = \int_{V_g} \mathbf{v} \times \mathbf{x} \rho dV. \quad (8.21')$$

Для массы M в фиксированном объеме V эйлера пространства в момент t из (8.21) получим с учетом (8.19)

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \int_V \rho \frac{dv}{dt} \times x dV \equiv \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v \times x) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i v \times x) dV - \\ &- \int_V \rho v^i v \times e_i dV = \int_V F \times x \rho dV + \int_{\Sigma} P^{(n)} \times x d\Sigma, \end{aligned}$$

откуда находим окончательно

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v \times x) dV + \int_{\Sigma} (\rho v^i n_i v - P^{(n)}) \times x d\Sigma - \int_V \rho F \times x dV = 0. \quad (8.22)$$

Для неподвижной области V при установившемся движении и $F = 0$ получаем

$$\int_{\Sigma} (\rho v^i n_i v - P^{(n)}) \times x d\Sigma = 0. \quad (8.22')$$

Следствием уравнения движения является теорема о кинетической энергии, называемая иногда законом сохранения механической энергии. Умножим дифференциальное уравнение движения частицы (8.13) на элементарное перемещение $\delta u = v \delta t$ и проинтегрируем результат по объему V среды, ограниченному поверхностью Σ

$$\int_V \left[\rho (F - w) v \delta t + \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i} v \delta t \right] dV = 0. \quad (8.23)$$

Величина $\rho F v \delta t = \rho F \delta u$ представляет работу массовых внешних сил в единице объема. Преобразуем остальные слагаемые соотношения (8.23):

$$\begin{aligned} \rho w \delta u &= \rho \frac{dv}{dt} v \delta t = \frac{1}{2} \rho \delta (v^2), \\ v \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma^i v) - \sigma^i \frac{\partial v^i}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно упростить, учитывая симметрию тензора напряжений и тождества $v_{ij} + \omega_{ij} = \partial v^i / \partial x^j$. Так как компоненты v_{ij} тензора скорости деформаций симметричны, а компоненты тензора вихря ω_{ij} антисимметричны, то $\sigma_{ij} \omega_{ij} \equiv 0$.

Скаляр, одинаковый во всех системах координат (7.46)

$$R = Q^{ij} V_{ij}^* = \sigma^{ij} v_{ij} = S^{ij} V_{ij} = \frac{t^{ik}}{A} \frac{\partial A_i^k}{\partial t}, \quad (8.24)$$

представляет объемную плотность мощности. Следовательно,

$$\int_V \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i} v \delta t dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x^i} (\sigma^i v) \delta t dV - \int_V R \delta t dV = \int_{\Sigma} \sigma^i n_i v \delta t d\Sigma - \int_V R \delta t dV,$$

причем $\sigma \cdot n_i = \mathbf{P}^{(v)}$ — вектор внешнего напряжения на поверхности Σ , и потому $\sigma^i n_i v \delta t = \mathbf{P}^{(v)} \delta \mathbf{u}$ есть работа внешней силы, приложенной на единице площади поверхности, на перемещении $\delta \mathbf{u}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{v}$).

Из (8.23) теперь получаем

$$\int_V \frac{1}{2} \rho \delta (v^2) dV + \int_V R \delta t dV = \int_V \rho \mathbf{F} \mathbf{v} \delta t dV + \int_{\Sigma} \mathbf{P}^{(v)} \mathbf{v} \delta t d\Sigma. \quad (8.25)$$

Для фиксированной в движущемся объеме V_g массы, т. е. при $\rho dV = \rho_0 dV_0$, область интегрирования по $\rho_0 dV_0$ при движении среды остается неизменной, знак вариации (дифференциала по времени) в первом интеграле можно вынести:

$$\int_{V_g} \frac{1}{2} \rho \delta (v^2) dV = \int_{V_g^0} \frac{1}{2} \delta (v^2) \rho_0 dV_0 = \delta \int_{V_g^0} \frac{1}{2} v^2 \rho_0 dV_0 = \delta \int_{V_g} \frac{\rho v^2}{2} dV.$$

Обозначим кинетическую энергию среды в объеме V_g через

$$K = \int_{V_g} \frac{1}{2} \rho v^2 dV, \quad (8.26)$$

работу тензора напряжений за время δt с учетом того, что

$$v_{ij} \delta t = \frac{de_{ij}}{dt} \delta t = \delta e_{ij}, \text{ через}$$

$$\delta' W = \int_{V_g} R \delta t dV = \int_{V_g} Q^{ij} V_{ij} \delta t dV = \int_{V_g} S^{ij} \delta e_{ij} dV \quad (8.27)$$

и работу внешних сил за время δt через

$$\delta' \tilde{A} = \int_{V_g} \rho \mathbf{F} \mathbf{v} \delta t dV + \int_{\Sigma_g} \mathbf{P}^{(v)} \mathbf{v} \delta t d\Sigma. \quad (8.28)$$

Из соотношения (8.25) имеем теорему: *сумма приращений кинетической энергии и работы напряжений фиксированной массы среды за время δt равна работе внешних сил на соответствующих перемещениях*

$$\delta K + \delta' W = \delta' \tilde{A}. \quad (8.29)$$

Штрихи у выражений $\delta'W$, $\delta'\bar{A}$ означают, что они не являются дифференциалами каких-то функций, хотя область интегрирования V_g в лагранжевых координатах не изменяется, например

$$\delta'W = \int_{V_g^0} \frac{1}{\rho} S^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \rho_0 dV_0. \quad (8.30)$$

Только в том случае, если существует потенциал напряжений Φ , зависящий только от деформаций ε_{ij} , так что

$$\frac{d\Phi}{dt} \delta t = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}, \quad S^{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

величина $\delta'W$ будет дифференциалом по времени от $W(t)$, называемой потенциальной энергией тела:

$$\delta'W = \delta W, \quad W = \int_{V_g^0} \Phi \rho_0 dV_0 = \int_{V_g} \rho \Phi dV.$$

Если при этом и внешние силы (\mathbf{F} , $\mathbf{P}^{(v)}$) имеют потенциал, так что $\delta'\bar{A} = \delta\bar{A}$, из (8.29) получается интеграл энергии:

$$K + W - \bar{A} = \text{const.}$$

Как увидим позднее, потенциал $\Phi(\varepsilon_{ij})$ и интеграл энергии могут существовать при некоторых процессах движения идеально упругих твердых тел и идеальных сжимаемых жидкостей и газов.

Уравнение сохранения массы в лагранжевых координатах (в Л) $\rho/\bar{g} \equiv \rho A = \rho_0$ и в эйлеровом пространстве (в Э) (8.14), дифференциальные уравнения движения (8.8) в Л и (8.13) в Э, теоремы об изменении количества движения и кинетического момента (8.18), (8.21) в Л и (8.20), (8.22) в Э и теорема о кинетической энергии (8.29) в Л и Э записаны соответственно для бесконечно малой (ρdV) и любой конечной массы среды в объеме V_g с поверхностью Σ_g , являющихся совершенно произвольными. Пользуясь этим произволом, можно получать точные постановки и решения задач, например, только на основании теоремы (8.20), учитывая симметрию тензора \mathbf{S}^i ($i=1, 2, 3$).

Но можно записать *вариационный принцип Лагранжа—Гамильтона* для всей изучаемой области движения среды, на поверхности Σ которой задан вектор напряжения $\mathbf{P}^{(v)}$ (на части Σ_s), перемещения $\mathbf{u}_{(v)}$ (на другой части Σ_u , не пересекающейся с Σ_s) и т. п. Умножая (8.8) на произвольный вектор $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$, который называем *вариацией истинного вектора перемещения* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$, и интегрируя по объему V , получим соотношения

$$-\int_V \eta \nabla_i S' dV = \int_V \rho (F - w) \eta dV \quad (x \in V), \quad (8.31)$$

$$S' v_i = P^{(v)} \quad (x \in \Sigma_s), \quad u = u_{(v)} \quad (x \in \Sigma_u). \quad (8.32)$$

Уже известным приемом левая часть (8.31) преобразуется к виду

$$-\int_{\Sigma} S' v_i \eta d\Sigma + \int_V S' \nabla_i \eta dV.$$

Получаем, с учетом (8.32), вариационный принцип

$$\int_V R(\tilde{S}, \eta) dV = \int_{\Sigma} P^{(v)} \eta d\Sigma + \int_V \rho (F - w) \eta dV, \quad (8.33)$$

где

$$R(\tilde{S}, \eta) = S' \nabla_i \eta = S'^{ij} \eta_{ij}, \quad \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \eta_j + \nabla_j \eta_i), \quad (8.34)$$

— работа внутренних сил на вариации перемещения в единице объема.

Пользуясь произвольностью вектора $\eta(x, t)$ в заданном V и на заданной Σ , из (8.33) можно вывести уравнение (8.8) и так называемые *естественные граничные условия*:

$$\int_{\Sigma} (S' v_i - P^{(v)}) \eta d\Sigma = 0. \quad (8.35)$$

Из них следует, конечно, что вектор η должен быть выбран так, чтобы $\eta = 0$ для $x \in \Sigma_u$; на Σ_s из (8.35) следуют условия (8.32).

Постановка задачи МСС с помощью вариационного уравнения (8.33) называется *обобщенной*, так как решение определяется в более широком классе функций сравнительно с решением на основе уравнений (8.8) и условий (8.32).

§ 9. ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМАЦИИ, НАГРУЖЕНИЯ И ДРУГИЕ

Дифференциальные уравнения движения (8.8) в L и (8.13) в \mathcal{E} являются дифференциальными в частных производных по координатам первого порядка относительно тензора напряжений \tilde{S} (его компонент в L и \mathcal{E}), второго порядка по времени относительно перемещения ($\ddot{x} = \partial^2 u(x, t) / \partial t^2$) в L и первого по времени и координатам относительно скорости ($dv/dt = \partial v / \partial t + v^i \partial v / \partial x^i$) в \mathcal{E} . В них входят неизвестные: скаляр ρ , вектор $u = x(x, t) - x$ в L , или $v(x, t)$ — в \mathcal{E} , и симметричный тензор \tilde{S} в L или \mathcal{E} . Для плотности ρ имеется условие сохранения массы (8.12) в L , или $\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho v) = 0$ (8.14) в \mathcal{E} . Таким образом, для 10 скалярных функ-

ций имеется 4 скалярных уравнения, т. е. система неопределенная.

Подчеркнем, что *дифференциальные уравнения движения (8.13) по существу справедливы и записаны в инерциальной декартовой системе координат (x_i), которую считаем неподвижной (см. § 22). Совокупность этих координат и классического времени t в МСС называется эйлеровым пространством \mathcal{E} , если в любой его точке ($x=x^i e_i, t$) определена непрерывно дифференцируемая по (x, t) вектор-функция поля $v(x, t)$, называемая вектором скорости среды в (x, t) , которая в любой момент t множеству точек x ставит в соответствие множество $x=x$ этого же неподвижного пространства в начальный момент $t=t_0$ по закону преобразования $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$:*

$$x = \varphi(x, t, t_0); \quad t = t_0, \quad x = x;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi, t). \quad (9.1)$$

По свойству $v(x, t)$ решение $x = \varphi(x, t)$ удовлетворяет условиям § 3, причем $x(x_i)$ называется лагранжевой координатой зафиксированной в момент t_0 физической точки среды (частицы).

В \mathcal{E} рассматриваются различные скалярные $z(x, t)$, векторные $z(x, t)$, тензорные $\tilde{z}(x, t)$ функции поля, которые все преобразуются к \mathcal{L} на основании (9.1). Декартовы в момент $t=t_0$ «вмороженные» в вещество координаты (x_i) образуют криволинейную пространственную систему координатных линий и поверхностей с непрерывно меняющейся во времени $t > t_0$ геометрией. Вещество не может сходить с линий и проникать сквозь эти поверхности. Три вектора репера $\vartheta_i(x, t)$ при $x = \text{const}$ в \mathcal{E} показывают всю кинематику заземленной в нем физической частицы, а метрический тензор $g_{ij} = \vartheta_i \vartheta_j$ — относительные смещения по t непроницаемых граней косоугольного параллелепипеда, заключающего частицу.

Естественно, что если как-то исключить поток немеханической энергии через грани частицы (т. е. тепла, тока, потока нейтронов...) *, то реакция частицы в виде тривектора сил $-P^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), действующих на грани параллелепипеда со стороны вещества частицы (изнутри), т. е. тривектор напряжения $S^i(x, t)$ в момент t будет зависеть от процесса изменения метрического тензора $g_{ij}(x, t) = \vartheta_i \vartheta_j$ в интервале времени $t_0 \leq \tau \leq t$, что, опуская аргумент $x = \text{const}$, запишем в виде

$$S^\alpha(t) = \mathcal{F}_t^\alpha(g_{ab}(\tau)) \equiv S_t^\alpha(g_{ab}(\tau)) \quad \text{или} \quad S_\alpha(t) = \mathcal{F}_\alpha^t(g_{ab}(\tau)), \quad t_0 \leq \tau \leq t,$$

$$\tilde{\mathcal{G}} \equiv (g_{ab}) \equiv (g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{12}, g_{23}, g_{31}) \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (9.2)$$

* Предполагаем, что эти потоки заметно не изменяют массы частицы.

Здесь $\mathcal{F}_t^\alpha(g_{ab}(\tau))$ — присущий физической природе вещества вектор-оператор по времени τ , действующий на метрический тензор, причем $S^\alpha \equiv S^{\alpha i} \partial_i$, $\mathcal{F}_t^\alpha \equiv \mathcal{F}_t^{\alpha i} \partial_i$, так что (9.2) означают

$$S^{ij}(t) = \mathcal{F}_t^{ij}(g_{ab}(\tau)), \quad S_{ij}(t) = \mathcal{F}_t^{mn} g_{mi} g_{nj} \equiv \mathcal{F}_t^i_j(g_{ab}(\tau)). \quad (9.3)$$

Тривектор $\partial_i(t)$ позволяет построить бесконечное множество единичных ортогональных реперов $k_i(t)$, однозначно ориентированных в частице $x = \text{const}$. Назовем γ -физически ориентированным репером k_i , такой, что при любом t вектор k_α совпадает с направлением физического волокна ∂_α , k_β лежит в плоскости волокон $(\partial_\alpha, \partial_\beta)$, k_γ направлен по ∂^γ :

$$k_\alpha = \frac{\partial_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}, \quad k_\beta = \frac{g_{\alpha\alpha} \partial_\beta - g_{\alpha\beta} \partial_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} (g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2)}}, \quad k_\gamma = \frac{\partial^\gamma}{\sqrt{g^{\gamma\gamma}}}. \quad (9.4)$$

При движении частицы x этот репер вращается как твердое тело в \mathcal{E} с некоторой угловой скоростью $\Omega_0(t)$, однозначно определяемой $\partial_i(t)$ и $\partial_i(\tau)$; но ее модуль $\Omega_0(t)$ не выражается через $g_{ab}(t)$, $\hat{g}_{ab}(t)$. Если соотношения (9.2) переписать, например, в виде

$$S^\alpha(t) = \partial_j(t) \mathcal{F}_t^{\alpha j}(\partial_1(\tau), \partial_2(\tau), \partial_3(\tau)), \quad (9.5)$$

то комбинации аргументов операторов $\mathcal{F}_t^{\alpha j}$, т. е. $\partial_i(\tau)$, $\dot{\partial}_i(\tau)$, ..., образующие $\Omega_0(\tau)$ или любую другую, отличную от $g_{ab}(\tau)$ (9.2), в $\mathcal{F}_t^{\alpha j}$ входить не могут, если $\Omega_0 \neq 0$ в k_i (при $\Omega_0 = 0$ главные оси деформации заморожены), т. е.

$$\mathcal{F}_t^{\alpha j}(\partial_1(\tau), \partial_2(\tau), \partial_3(\tau)) \equiv \mathcal{F}_t^{\alpha j}(g_{ab}(\tau)). \quad (9.5')$$

Сплошная среда ориентирована в инерциальном (неподвижном) пространстве \mathcal{E} , если в начальный момент $t = t_0$ некоторая точка среды, например $x = 0$, неподвижна и γ -ориентированный репер k_i (9.4) совмещен с неподвижным ортонормированным репером \mathcal{E} , т. е. $e_i(t) = e_i(\tau) = e_i(t_0)$. В любую точку x и в любой момент t этот репер e_i может быть параллельно перенесен; следовательно, вместе с точкой $x = \text{const}$ движутся поступательно — декартов репер $e_i(t)$, вращающийся в нем γ -ориентированный ортогональный репер $k_i(t)$ и физический деформирующийся репер $\partial_i(t)$.

При всех перечисленных условиях в \mathcal{E} справедливы уравнения движения в виде (8.13) или преобразованные на основании (9.1) к лагранжевым координатам — в виде (8.11). Соотношения типа (9.2), (9.3), в \mathcal{L} , связывающие тензор напряжений \tilde{S} с тензором деформаций $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{\mathcal{E}} - I)/2$, называются определяющими (§ 10); они в принципе могут быть преобразованы в \mathcal{E} на основании (9.1) с использованием преобразований § 7. Соотношения (9.2) делают

систему (8.11), следовательно и (8.13), замкнутой, поскольку $g_{ij}(x, t)$ выражаются через $x(x, t)$, $g_{ij} = (\partial x / \partial x_i) (\partial x / \partial x_j)$, а следовательно, (8.11) на основании (9.2) представляет одно векторное функциональное уравнение по (x, t) для одного вектора $x(x, t)$, которое с учетом (4.15) принимает вид

$$\rho_0 (\ddot{x}(x, t) - F) = \nabla_i S_i^t \mathcal{G}(x, t) \quad (9.6)$$

Если в (9.6) оператор $S_i^t(\tilde{\mathcal{G}}(x, t))$ известен, то в любых взаимно однозначных системах координат $x' = f(x, t)$, $t' = t$, например при аффинных преобразованиях системы Э

$$x' = \tilde{a}(t)x, \quad t' = t \quad (9.7)$$

из (9.6) получим правильные преобразованные уравнения: хорошо изучены в аналитической механике преобразования ускорения $w = dv/dt$ к неинерциальным системам. Наиболее сложным будет преобразование оператора (9.2), на первый взгляд кажущееся элементарным, так как рассматривалось только для сильно идеализированных моделей жидких и твердых тел. Реально же в окрестности любой физической точки среда может быть анизотропной как по механическим, так и по тепловым и электромагнитным свойствам при $t = t_0$, изменять свою анизотропию (коэффициенты упругости, вязкости, тепло-электропроводности, пьезоэлектрические и много других констант) в процессах, идущих на интервале $t_0 \leq \tau \leq t$. Именно потому и потребовалось ориентировать в среде координатные системы Э и Л, вморозить в точке x при $t = t_0$ деформирующийся с окрестностью репер ε_i , построить γ -ориентированный в ней ортонормированный репер k_i , с тем чтобы убедиться, что геометрическая ориентация любого материального элемента внутри физической окрестности относительно движущегося γ -ориентированного ортогонального репера в любой момент $\tau \geq t_0$ определяется только метрическим тензором $\tilde{\mathcal{G}}(x, t)$. Это и привело к выводу о существовании оператора (9.2). Проблема определяющих соотношений рассматривается в § 10, но ясно, что она связана с различными процессами.

Естественно, что физический процесс деформации, происходящий в окрестности фиксированной точки $x = \text{const}$ с течением времени $\tau \geq t_0$, сопровождается теплообменом, облучением, электромагнитными явлениями (гл. I, III, IV, V), т. е. характеризуется скалярными и векторными однородными по x парами функций времени t : T, η (температура, энтропия), $g = \text{grad } T, q$ (тепловой поток), E, D (электрический вектор, вектор индукции), H, B (магнитный вектор, вектор магнитной индукции); их совокупность называем параметрами $\beta(\tau)$. Пара механической природы \mathcal{E}, \mathcal{S} (известные тензоры) наиболее многомерна, так как каждый

из них определяется шестеркой функций $\varepsilon_{ij}(\tau)$, $S^{ij}(\tau)$ и потому определения функций и функционалов, построенные на $\tilde{\varepsilon}$ и \tilde{S} , поясняют процедуры для всех $\beta(\tau)$.

По определению в окрестности точки $x = \text{const}$ (иначе — для физической частицы) *задан процесс деформации*, если тензор деформации для этой точки задан в виде непрерывно дифференцируемой функции времени

$$x = \text{const}: \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t. \quad (9.8)$$

В различных частных движениях среды реализуются различные функции (9.8); и в рассматриваемом классе непрерывно дифференцируемых по τ на них не накладывается ограничений.

Аналогично в окрестности точки $x = \text{const}$ *задан процесс нагружения*, если тензор напряжений для нее задан в виде непрерывно дифференцируемой функции времени

$$x = \text{const}: \tilde{S} = \tilde{S}(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t. \quad (9.9)$$

Тензор $\tilde{S}(\tau)$ определяет напряженность окрестности точки x , в частности *конфигурацию* результирующих векторов напряжений по граням рассмотренного параллелепипеда в момент τ , а процесс (9.9) — эволюцию этих векторов во времени на движущихся гранях.

Пусть \tilde{Z} — какой-нибудь из симметричных тензоров $\tilde{\varepsilon}$, \tilde{S} и других, которые могут быть построены на базе $\tilde{\varepsilon}$, \tilde{S} (например, тензор скорости деформаций \tilde{V}), и пусть задан процесс

$$x = \text{const}: \tilde{Z} = \tilde{Z}(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad (9.10)$$

который однозначно определяет в этой же точке другой тензор \tilde{Y} и, следовательно, другой процесс $\tilde{Y}(\tau)$. При этих условиях значение в момент $\tau = t$ объекта $\tilde{Y}(t)$ будем называть функционалом процесса $\tilde{Z}(\tau)$, или оператором над процессом $\tilde{Z}(\tau)$, и записывать его в одном из видов

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{\mathcal{F}}^t(\tilde{Z}(\tau), t, \tau) \equiv \tilde{\mathcal{F}}^t(\tilde{Z}(\tau)) = \tilde{Y}(\tilde{Z}). \quad (9.11)$$

В (9.11) в скобках, содержащих тензор-аргумент $\tilde{Z}(\tau)$, следовало бы выписать тензорные аргументы-константы, если при $\tau = t_0$ они заданы; для простоты полагаем, что их нет, а единичный тензор I не выписываем. В теории термомеханических свойств различных сплошных сред задача аналитического представления функционалов (9.11) — одна из основных.

Практически все твердые тела, например в некотором интервале температур $T \leq T^*$, деформаций $|\varepsilon_{ij}| \leq \delta^*$ и времени $t - t_0 \leq t^*$ с высокой степенью точности — упругие, т. е. опыты показывают,

что для изотермических процессов ($T = \text{const}$) значение тензора напряжения в момент t является просто аналитической функцией значения тензора деформации в этот же момент t .

При аналогичных условиях многие *жидкости* — *вязкие*, т. е. опыты показывают, что для любых изотермических процессов $\tilde{S}(t)$ зависит только от $\tilde{V}(t)$.

Таким образом, простейшие функционалы (9.11) представляют функции, содержащие кроме \tilde{Z} только единичный тензор-константу I ,

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{Z}(\tau)) = \mathcal{F}(\tilde{Z}), \quad (9.12)$$

называемые поэтому *изотропными*. Дифференциалом такой функции, естественно, называется

$$d\tilde{Y} = \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{d\tilde{Z}} d\tilde{Z} \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial Z_{ij}} dZ_{ij}, \quad (9.12')$$

и потому, если дан еще тензор $\tilde{X} = (X_{ij})$ с матрицей $\|X_{ij}\|$, то определен оператор

$$\frac{d\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{Z})}{d\tilde{Z}} \tilde{X} \equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial Z_{ij}} X_{ij}.$$

Называется n -й степенью симметричного тензора \tilde{Z} симметричный тензор с компонентами

$$\tilde{Z}^n = ((Z^n)_{ij}), \quad (Z^n)_{ij} = Z_{im_1} Z_{m_1 m_2} \dots Z_{m_{n-1} i}. \quad (9.13)$$

Если обозначим $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ главные значения тензора \tilde{Z} , определяемые как корни характеристического уравнения (§ 4, 5)

$$|Z_{ij} - \zeta \delta_{ij}| = -\zeta^3 + a\zeta^2 - b\zeta + c = 0,$$

$$a = Z_{ij} \delta_{ij} = \sum_{m=1,2,3} \zeta_m, \quad b = \frac{1}{2} (a^2 - Z_{ij} Z_{ij}) = \sum \zeta_\alpha \zeta_\beta, \quad c = |Z_{ij}| = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3,$$

то тензор \tilde{Z} удовлетворяет кубическому уравнению Гамильтона—Кэли:

$$\tilde{Z}^3 = a\tilde{Z}^2 - b\tilde{Z} + cI, \quad (9.13')$$

которое на основании обозначений (9.13) есть просто алгебраическое тождество. Следовательно,

$$\tilde{Z}^n = a\tilde{Z}^{n-1} - b\tilde{Z}^{n-2} + c\tilde{Z}^{n-3}, \quad (9.13'')$$

и потому всякая функция тензора \tilde{Z} , выражающаяся полиномом по \tilde{Z} , представима квадратичным полиномом \tilde{Z} :

$$\mathcal{F}(\tilde{Z}) = f_1 I + f_2 \tilde{Z} + f_3 \tilde{Z}^2, \quad (9.14')$$

причем f_1, f_2, f_3 зависят только от a, b, c , т. е. от корней (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Явное выражение f_k ($k=1, 2, 3$) через \mathcal{F} и ξ_k представляет *интерполяционный полином Лагранжа* (α, β, γ — четная подстановка индексов 1, 2, 3):

$$\mathcal{F}(\tilde{Z}) = \sum_{\alpha=1,2,3} \mathcal{F}(\xi_\alpha) \frac{(\tilde{Z} - \xi_\beta)(\tilde{Z} - \xi_\gamma)}{(\xi_\alpha - \xi_\beta)(\xi_\alpha - \xi_\gamma)}. \quad (9.14)$$

При этом предполагается, что все корни ξ_i различны. Можно раскрыть неопределенности в случае равных корней и таким образом дать определяющие соотношения для изотермических процессов в нелинейных изотропных упругих телах и вязких жидкостях.

Однако те же твердые и жидкие тела при более высокой температуре или больших деформациях и скоростях, или в большем интервале времен, или при необходимости более точного отражения законом типа (9.11) физических их свойств, или при всех перечисленных условиях обнаруживают свойства, заметно или очень существенно отличающиеся от описываемых формулами (9.12), (9.14). Поэтому, учитывая разнообразие твердых, жидких и газообразных тел, в МСС необходимо рассматривать функционалы весьма общего вида. Однако можно внести некоторую определенность, возникающую в связи с особенностями задач МСС и с физическими свойствами многих сред. При этом необходимо учитывать, что тензор $\tilde{\epsilon}$ почти при всех t — непрерывно дифференцируемый по t и даже дважды непрерывно дифференцируемый.

Во всех случаях функционал (9.11) можно рассматривать как предел функции многих переменных: интервал $t-t_0$ разбивается на n отрезков $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$), $\tau_0 = t_0$, $\tau_n = t$, берется набор значений $\tilde{Z}_k = \tilde{Z}(\tau_k)$ и рассматривается некоторая функция

$$\tilde{Y}_n = \tilde{J}(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \dots, \tilde{Z}_n). \quad (9.15')$$

Утверждается: для функционала (9.11) найдется такая функция n переменных (9.15'), что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Y}_n = \tilde{Y}'[\tilde{Z}(\tau)] \quad (9.15)$$

и что функция (9.15') при конечном n может быть аппроксимирующей для $\tilde{Y}(\tilde{Z})$. Значение функции $\tilde{Z}(\tau)$ при $\tau = \tau_n$ есть линейный функционал $\tilde{Z}(\tau)$:

$$\tilde{Z}_n \equiv \tilde{Z}(\tau_n) = \int_{t_0}^t \tilde{Z}(\tau) \delta(\tau - \tau_n) d\tau. \quad (9.15'')$$

Следовательно, функционал (9.11) есть функция линейных по \tilde{Z} функционалов и представляется непрерывным функционалом.

Далее, функционал (9.11) при $\dot{Y}=\dot{S}$ и $\dot{Z}=\dot{\mathcal{E}}$ может быть непрерывной и даже непрерывно дифференцируемой функцией параметра t .

Функционал (9.11) может иметь дифференциал Фреше, т. е. для любых заданных $\tilde{\mathcal{E}}(\tau)$ и $\delta\tilde{\mathcal{E}}(\tau)=\tilde{\mathcal{E}}_1(\tau)-\tilde{\mathcal{E}}(\tau)$ с нормой $\|\delta\tilde{\mathcal{E}}\|\leq\Delta$ разность

$$\tilde{S}'[\tilde{\mathcal{E}}_1(\tau)]-\tilde{S}'[\tilde{\mathcal{E}}(\tau)]=\delta\tilde{S}(t)$$

отличается от линейного по $\delta\tilde{\mathcal{E}}$ функционала на величину порядка $o(\Delta)$. Следовательно, при $\Delta\rightarrow 0$ $\delta\tilde{S}$ может быть представлен в виде интеграла

$$\delta\tilde{S}(t)=\int_{t_0}^t \delta\dot{\tilde{\mathcal{E}}}(\tau) d\tau K_s(t, \tau), \quad (9.16)$$

где K_s — некоторый функционал $\tilde{\mathcal{E}}$, определяемый функционалом $\tilde{S}(\tilde{\mathcal{E}})$.

Для аналитических процессов деформации, когда $\tilde{\mathcal{E}}(\tau)$ представим рядами Тейлора, например

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tau)=\tilde{\mathcal{E}}(t)+(\tau-t)\dot{\tilde{\mathcal{E}}}(t)+\frac{1}{2}(\tau-t)^2\ddot{\tilde{\mathcal{E}}}(t)+\dots,$$

где $\dot{\tilde{\mathcal{E}}}(t)$, $\ddot{\tilde{\mathcal{E}}}(t)$, ... — производные $\tilde{\mathcal{E}}$ по t , т. е. скорость \dot{V} , ускорение \ddot{V} и т. д. в точке t , функционал напряжения \tilde{S} может представлять универсальную для данного вещества функцию производных $\tilde{\mathcal{E}}(t)$ по t :

$$\tilde{S}(t)=\tilde{S}'[\tilde{\mathcal{E}}(\tau)]=\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{E}}(t), \dot{\tilde{\mathcal{E}}}(t), \ddot{\tilde{\mathcal{E}}}(t), \dots), \quad (9.17)$$

причем его можно аппроксимировать функцией некоторого конечного числа производных.

Некоторые из перечисленных ниже свойств функционала (9.11) являются типичными.

Оператор (9.11) имеет обратный взаимно однозначный, т. е. из (9.11) следует существование единственного обратного оператора $\tilde{Z}'[\tilde{Y}(\tau)]$.

Функционал \tilde{S} — аналитический и может быть представлен в виде суммы многократных интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t)=\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_n(t), \quad \tilde{S}_n(t)=\int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} \hat{K}_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \tilde{\mathcal{E}}(\tau_1) \dots \\ \dots \tilde{\mathcal{E}}(\tau_n) d\tau_n, \end{aligned} \quad (9.18)$$

причем K_n — некоторая матрица-функция (функция памяти) $n+1$ переменной τ_k, t , универсальная для данного вещества. В частности, в МСС существенно используется линейный функционал

$$\tilde{S}(t) = \int_0^t \widehat{K}_1(t, \tau) \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (9.19)$$

Построение конкретных видов функционалов (9.11) для различных сред представляет одну из фундаментальных проблем современной МСС.

Операции дифференцирования и интегрирования тензора по параметру t в лагранжевом и эйлеровом пространствах являются основными в теории процессов. Пусть в движущейся фиксированной точке среды $x = \text{const}$ и ее фиксированной окрестности ($x + dx$) даны тензор $\tilde{Z}(t)$ и зависящая от времени инвариантная квадратичная форма $\varphi_Z(t)$, имеющая определенный физический смысл:

$$\varphi_Z(t) = Z_{ij} dx^i dx^j = z_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.20)$$

где $Z_{ij}(x, t)$ — ковариантные компоненты в лагранжевых координатах; $z_{ij}(x, t)$, или, что то же, $z^{ij}(x, t)$ — компоненты тензора \tilde{Z} в декартовом базисе e_i пространства наблюдателя, и в силу закона движения $x = x(x, t)$, $dx = A_i^k dx^k e_k$. Применительно к тензору деформации $\tilde{\varepsilon}$ (9.20) является квадратом длины фиксированного начального волокна $\xi = dx$ в момент t , т. е. волокна $dx = dx^i e_i = A_i^j dx^j e_i$:

$$\varphi_\rho = \rho^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.20')$$

или

$$\varphi_\varepsilon = \rho^2 - \xi^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j = 2E_{ij} dx^i dx^j. \quad (9.20'')$$

Можно рассмотреть физическую площадку, нормальную к волокну $dx = \xi$ в момент t , т. е. к волокну $\rho = dx = \varepsilon_i dx^i$. Нормальное напряжение на такой площадке согласно (6.10), (6.38) удовлетворяет уравнению

$$N_\rho = \sigma_{ij} n_i n_j = S^{ij} v_i v_j, \quad (9.21)$$

причем

$$n = v = \frac{dx}{\rho}, \quad \rho = |dx|, \quad n_i = \frac{dx^i}{\rho}, \quad v_i = n_k A_i^k. \quad (9.21')$$

Отсюда с помощью g^{ij}, g_{ij} получим связь между компонентами \tilde{S} в лагранжевых и эйлеровых координатах

$$\sigma_{kl} A_m^k A_n^l = S_{mn} = S^{ij} g_{mi} g_{jn} = S_m^j g_{jn} = S^i_n g_{mi}. \quad (9.22)$$

Умножая (9.21) на ρ^2 , получим (9.20) для $Z=S$:

$$\varphi_S \equiv \rho^3 N_\rho = \sigma_{ij} dx^i dx^j = S_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.23)$$

причем последнее равенство и непосредственно получается из (9.22) умножением на $dx^m dx^n$.

Формулы (9.22) верны для любого симметричного тензора Z в координатах (x) и (x) :

$$z_{ij} A_m^i A_n^j = Z_{mn} = Z^{ij} g_{mi} g_{jn} = Z_m^{\cdot j} g_{jn} = Z_{\cdot n}^i g_{mi}. \quad (9.24)$$

В (9.20), (9.24) z_{ij} даны как функции x, t ; Z_{mn} , Z^{ij} , $Z_{\cdot n}^i$, $Z_m^{\cdot j}$ — как функции x, t .

Дифференцируя скаляр $\varphi_z(t)$, (9.20) по t , получим снова скаляр $\dot{\varphi}_z(t)$, т. е. скорость

$$\dot{\varphi}_z(t) = \frac{dz_{ij}}{dt} dx^i dx^j \equiv \dot{Z}_{ij} dx^i dx^j. \quad (9.25)$$

Следовательно, по обратному признаку \dot{Z}_{ij} — ковариантная компонента J_{ij} некоторого тензора J , называемого ковариантным тензором скорости тензора Z :

$$\bar{J} = \dot{\bar{Z}}, \quad J_{ij} = \dot{Z}_{ij} \equiv \dot{Z}_{ij}^0. \quad (9.26)$$

Обозначая y_{ij} компоненты J в декартовых координатах пространства наблюдателя, в соответствии с (9.20) скаляр $\varphi_y(t) = \varphi_z(t)$ можем записать в двух видах:

$$\varphi_y = J_{ij} dx^i dx^j = y_{ij} dx^i dx^j. \quad (9.27)$$

Выражения компонент y_{ij} получаем непосредственно путем дифференцирования по t при $x = \text{const}$ скаляра (9.20)

$$\varphi_z(t) = z_{ij} dx^i dx^j,$$

в котором

$$z_{ij} = z_{ij}(x, t), \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} dx^k.$$

Обозначая по-прежнему через $v^k = v_k$ декартовы компоненты вектора скорости $v(x, t)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dz_{ij}}{dt} &= \frac{\partial z_{ij}}{\partial t} + v \frac{\partial z_{ij}}{\partial x} \equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial t} + v^k \frac{\partial z_{ij}}{\partial x^k}, \\ \frac{d}{dt} (dx^i) &= \frac{\partial v^i}{\partial x^k} dx^k = \frac{\partial v^i}{\partial x^m} dx^m. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi_y = \dot{\varphi}_z &= \frac{dz_{ij}}{dt} dx^i dx^j + z_{ij} \frac{\partial v^l}{\partial x^m} dx^m dx^j + z_{ij} \frac{\partial v^j}{\partial x^m} dx^m dx^i \equiv \\ &= \left(\frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im} \frac{\partial v^m}{\partial x^j} + z_{mj} \frac{\partial v^m}{\partial x^i} \right) dx^i dx^j.\end{aligned}\quad (9.25')$$

Сравнивая это выражение с (9.27), находим компоненты y_{ij} , которые обозначим также z_{ij} (z_{ij} с кружочком сверху):

$$y_{ij} = \overset{0}{z}_{ij} = \frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im} \frac{\partial v^m}{\partial x^j} + z_{mj} \frac{\partial v^m}{\partial x^i}.\quad (9.28)$$

Очевидна симметрия: из $z_{ij} = z_{ji}$ следует $y_{ij} = y_{ji}$. Следовательно, правило дифференцирования $\varphi_z(t)$ (9.20) по t :

$$\dot{\varphi}_z = \dot{Z}_{ij}(x, t) dx^i dx^j = \overset{0}{z}_{ij}(x, t) dx^i dx^j.\quad (9.29)$$

Повторное дифференцирование по времени t скаляра (9.20) приводит к тензорам, являющимся соответствующими производными тензора Z . Например,

$$\ddot{\varphi}_z = \ddot{Z}_{ij} dx^i dx^j = \overset{0}{J} dx^i dx^j = \overset{0}{y}_{ij} dx^i dx^j,\quad (9.29')$$

причем $\overset{0}{Z}_{ij}$ являются ковариантными компонентами тензора ускорения $\overset{0}{J} = \ddot{Z}$ в лагранжевых координатах, а компоненты $\overset{0}{y}_{ij}$ находятся при замене букв в (9.28) z_{ij} на y_{ij} и подстановке в полученное выражение вместо y_{ij} их выражений (9.28).

Операция интегрирования выражения (9.20) по t в лагранжевых координатах приводит к тензор-интегралу тензора Z , причем ковариантные его компоненты равны

$$\int Z_{ij}(x, t) dt.$$

Представление этого тензор-интеграла в эйлеровом пространстве сложнее. Пусть дан тензор \tilde{J} его квадратичной формой φ_y (9.27), и пусть для определенности необходимо построить тензор-интеграл от J , обращающийся в ноль при $t=t_0$. Интегрируя (9.27) и учитывая (9.26), получим

$$\int_{t_0}^t \varphi_y(\tau) d\tau = dx^i dx^j \int_{t_0}^t J_{ij}(x, \tau) d\tau = Z_{ij}(x, t) dx^i dx^j = \tilde{y}_{ij} dx^i dx^j,\quad (9.30)$$

причем $Z_{ij}(x, t_0) = 0$; \tilde{y}_{ij} обозначены компоненты в эйлеровом пространстве. Из сравнения (9.30) с (9.20) заключим, что

$$\tilde{y}_{ij} = z_{ij}\quad (9.31)$$

и $z_{ij}(x, t)$ определяются по заданным $v(x, t)$ и $y_{ij}(x, t)$ линейными дифференциальными уравнениями (9.28) и начальными условиями ($i, j=1, 2, 3$)

$$t=t_0, \quad x=x, \quad z_{ij}(x, t_0)=0, \quad (9.32)$$

т. е. компоненты $\tilde{y}_{ij}=z_{ij}$ явно через y_{ij} не представляются. Вопрос о повторных тензор-интегралах решается аналогично.

Для квадрата длины волокна $\varphi_p=\rho^2$ (9.20') компоненты тензора \dot{Z} представляют собой ковариантные компоненты метрического тензора в лагранжевых координатах $Z_{ij}=g_{ij}=\delta_{ij}+2e_{ij}$ и $z_{ij}=\delta_{ij}$ — в декартовых эйлеровых. Из (9.28), (9.27) находим

$$y_{ij} \equiv \overset{0}{\delta}_{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} = 2v_{ij}(x, t),$$

$$J_{ij} \equiv \dot{g}_{ij} = \frac{\partial g_{ij}(x, t)}{\partial t} = 2 \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = 2V_{ij}(x, t),$$

$$\Phi_p \equiv \dot{\varphi}_p = 2\rho\dot{\rho} = \dot{g}_{ij}dx^i dx^j = 2v_{ij}dx^i dx^j; \quad \dot{g}_{ij} = 2v_{mn}A_i^m A_j^n. \quad (9.33)$$

Аналогично из (9.20'') для φ_z и тензора Альманси

$$\dot{e}_{ij}(x, t) = \overset{0}{E}_{mn}(x, t) A_i^m A_j^n; \quad \overset{0}{E}_{ij}(x, t) = \frac{1}{2} \overset{0}{\delta}_{ij}(x, t) = v_{ij}. \quad (9.34)$$

Этот тензор скорости деформации $\dot{V} = \dot{\hat{E}}$ с компонентами $V_{ij}(x, t)$, $v_{ij}(x, t)$ и другими, связанными согласно (9.24) соотношениями

$$\dot{e}_{mn} = V_{mn} = v_{ij}A_m^i A_n^j = V^{ij}g_{mi}g_{jn} = V_m^j g_{jn} = V_m^j g_{jm}, \quad (9.24')$$

используется в дальнейшем.

Аналогичный вывод получим для тензора скорости напряжения \dot{S} на основании формулы (9.23):

$$\dot{\Phi}_S = \dot{S}_{ij}dx^i dx^j = \overset{0}{\sigma}_{ij}dx^i dx^j, \quad \dot{S}_{ij} \equiv \overset{0}{S}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} S_{ij}(x, t);$$

$$\overset{0}{\sigma}_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}(x, t)}{dt} + \sigma_{im} \frac{\partial v^m}{\partial x^j} + \sigma_{jm} \frac{\partial v^m}{\partial x^i};$$

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}A_m^i A_n^j = \dot{S}_{mn} \equiv \overset{0}{S}_{mn} = \overset{0}{S}^{ij}g_{mi}g_{jn} = \overset{0}{S}^{ij}g_{mj}. \quad (9.35)$$

Отметим, что точка сверху лагранжевых компонент тензоров означает производную по t , кружочек же — компоненты скорости тензора, получаемые поднятием и опусканием индексов с помощью метрического тензора g_{ij} , g^{ij} из ковариантных компонент.

Формулы (9.24) получаются одна из другой умножением левых и правых частей на $A_q^p = \partial x^p / \partial x^q$ (например, вторая из пер-

вой — на $A_k^i A_l^j$, вторая из третьей — на A_l^j) и использования равенства $g^{im}(x, t) g_{mj}(x, t) = \delta_j^i$. Дифференцируя его по t , получим

$$\dot{g}^{ij} = -\dot{g}_{mn} g^{im} g^{jn} = -2V_{mn} g^{im} g^{jn} = -2V^{ij}. \quad (9.36)$$

Сравнивая с (9.33), (9.34), видим, что скорость контравариантной компоненты \dot{g}^{ij} равна контравариантной компоненте, получаемой из скоростей ковариантных компонент путем поднятия индексов, но с обратным знаком. Отсюда следует, что скорости ковариантных \dot{Z}_{ij} , контравариантных \dot{Z}^{ij} и смешанных компонент \dot{Z}^i_j, \dot{Z}_j^i тензора Z в лагранжевой системе координат образуют четыре различных тензора скорости — ковариантный, контравариантный и два смешанных тензора скорости тензора Z , причем формулы (9.25) — (9.35) относятся к первому из них, получаемому дифференцированием первой формулы из группы (9.24), т. е.

$$z_{ij} A_m^i A_n^j = Z_{mn}.$$

Умножая на $B_k^m B_l^n$ ($B_k^m = \partial x^m / \partial x^k$) вторую формулу группы (9.24), найдем

$$z_{ij} = Z^{mn} A_m^i A_n^j.$$

После дифференцирования по t с использованием (9.24) получим

$$\begin{aligned} \dot{z}_{ij} &= \dot{Z}^{mn} A_m^i A_n^j; \quad \dot{Z}^{mn} = \frac{\partial Z^{mn}(x, t)}{\partial t}, \quad \dot{Z}_{mn} = \dot{Z}^{ij} g_{mi} g_{nj} \dots, \\ \dot{z}_{ij} &= \frac{dz_{ij}}{dt} - z_{im} \frac{\partial v^j}{\partial x^m} - z_{mj} \frac{\partial v^i}{\partial x^m}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Птичкой « \vee » сверху компонент обозначены компоненты контравариантного тензора, получаемого по компонентам \dot{Z}^{ij} в лагранжевых и по компонентам \dot{z}_{ij} — в эйлеровых координатах.

Дифференцируя аналогично по t третье и четвертое уравнения группы (9.24), получим два смешанных тензора скорости деформации с компонентами в лагранжевых координатах $\dot{Z}^i_j \equiv \dot{Z}^i_j$ (знак $>$ сверху), $\dot{Z}_j^i \equiv \dot{Z}_j^i$ (знак $<$ сверху) и соответственно \dot{z}^i_j и \dot{z}_j^i — в эйлеровых, причем

$$\begin{aligned} \dot{z}^i_j &= \dot{z}^i_j - 2z_{im} v_{mj} = \frac{dz^i_j}{dt} - z_{im} \frac{\partial v^j}{\partial x^m} + z_{jm} \frac{\partial v^i}{\partial x^m}; \\ \dot{z}_j^i &= \dot{z}_j^i - 2z_{jm} v_{mi} = \frac{dz_j^i}{dt} + z_{im} \frac{\partial v^m}{\partial x^j} - z_{jm} \frac{\partial v^i}{\partial x^m}. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Четыре тензор-скорости тензора \tilde{Z} , обозначенные выше

$$\overset{0}{\tilde{Z}}, \overset{V}{\tilde{Z}}, \overset{\geq}{\tilde{Z}}, \overset{\leq}{\tilde{Z}}, \quad (9.39)$$

линейно зависимы алгебраически:

$$\overset{0}{z}_{ij} + \overset{V}{z}_{ij} = \overset{\geq}{z}_{ij} + \overset{\leq}{z}_{ij}, \quad \overset{0}{\tilde{Z}} + \overset{V}{\tilde{Z}} = \overset{\geq}{\tilde{Z}} + \overset{\leq}{\tilde{Z}} \equiv 2\overset{\wedge}{\tilde{Z}}, \quad (9.40)$$

причем, конечно,

$$\overset{0}{\dot{z}}_{ij} + \overset{V}{\dot{z}}_{ij} = \overset{\geq}{\dot{z}}_{ij} + \overset{\leq}{\dot{z}}_{ij}, \quad \overset{0}{\dot{z}}^{ij} + \overset{V}{\dot{z}}^{ij} = \overset{\geq}{\dot{z}}^{ij} + \overset{\leq}{\dot{z}}^{ij}, \dots$$

и тензор (9.40) имеет компоненты в эйлеровых координатах

$$\hat{z}_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\overset{0}{z}_{ij} + \overset{\leq}{z}_{ij}) = \frac{dz_{ij}}{dt} + z_{im}\omega_{mj} + z_{jm}\omega_{mi}, \quad (9.41)$$

где $\omega_{pq} = (\partial v^p / \partial x^q - \partial v^q / \partial x^p) / 2$ — компоненты тензора вихря. Следовательно, в качестве алгебраически линейно независимых име-

ем три симметричных тензора скорости тензора \tilde{Z} : $\overset{0}{\tilde{Z}}, \overset{V}{\tilde{Z}}, \overset{\wedge}{\tilde{Z}}$. Но все они вместе с \tilde{Z} линейно зависимы при заданном законе движения $x = x(x, t)$, что следует из (9.28), (9.37), (9.40), (9.41) в эйлеровых координатах и из (9.24) — в лагранжевых. Например,

$$\dot{Z}_{mn} = \dot{Z}^{ij} g_{mi} g_{nj} + Z^{ij} (\dot{g}_{mi} g_{nj} + g_{mi} \dot{g}_{nj}),$$

или

$$\overset{0}{\dot{Z}}_{ij} = \overset{\leq}{\dot{Z}}_{ij} + Z_i^n \dot{g}_{nj} + Z_j^n \dot{g}_{ni}, \quad (9.42)$$

и два аналогичных — для $\overset{\geq}{\tilde{Z}}$ и $\overset{\leq}{\tilde{Z}}$.

Представление одного и того же функционала связи между тензором напряжения и деформации типа (9.17) возможно с помощью любого из тензоров (9.39) и их ускорений высших порядков, т. е. выбор их определяется только простотой и удобством представления физического функционала связи для рассматриваемого вещества.

Построенные выражения производных и интегралов необходимы при преобразованиях определяющих соотношений типа (9.11) от \mathcal{L} к \mathcal{E} и обратных. Например, соотношения типа упругости и вязкости

$$S_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \text{ в } \mathcal{L},$$

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} + 2m v_{ij} \text{ в } \mathcal{E}$$

простым умножением на $B_m^i B_n^j$ и $A_m^i A_n^j$ приводятся соответственно к

$$\sigma_{mn} = \lambda \theta \delta_{mn} + 2(\mu - \lambda \theta) E_{mn} \text{ в } \mathfrak{E},$$

$$S_{mn} = p g_{mn} + m \dot{g}_{mn} \text{ в } \mathfrak{L}.$$

Конечно, в общем случае (9.11) все значительно сложнее, что видно из (9.15), (9.15'), (9.15'') и других отмеченных выше представлений.

В гл. V процесс $Z(x, t)$ при $x = \text{const}$ рассматривается как траектория 6- и 5-мерного вектора в пространстве его компонент и даются некоторые канонические представления функционала (9.14) на основе понятий длины дуги и кривизны траектории вектора деформации.

Уже отмечено, что в определяющих соотношениях (9.11) оператор $\dot{Y}^i(Z(\tau))$ в \mathfrak{L} можно рассматривать как функцию линейных операторов над $Z(\tau)$ типа (9.19), не зависящую от $Z(\tau)$: она одинакова для различных процессов $Z' = Z(x_1, \tau)$ и $Z'' = Z(x_2, \tau)$ в двух различных точках $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$ среды. Возникает вопрос сравнения и параметров различия $Z'(t)$ и $Z''(t)$, т. е. их геометрических образов.

Симметричному тензору $Z = (z_{ij})$ в соответствие поставим 6-мерное линейное пространство E_6 ортогонального вектора z в репере a_k ($k = 0, 1, \dots, 5$; $a_k a_l = \delta_{kl}$), причем так, чтобы 5-мерное подпространство ($k = 1, 2, \dots, 5$) соответствовало девиатору Z , а свертка двух тензоров $y_{ij} z_{ij}$ равнялась скалярному произведению yz . Тождество $yz = y_k z_k$

при замене

$$y_{ij} = \tilde{y}_{ij} + \frac{1}{3} y_0 \delta_{ij}, \quad z_{ij} = \tilde{z}_{ij} + \frac{1}{3} z_0 \delta_{ij}, \quad (9.43)$$

принимает вид

$$yz = y_{ij} z_{ij} = \tilde{y}_{ij} \tilde{z}_{ij} + \frac{1}{3} y_0 z_0 \quad (i, j = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots, 5) \quad (9.43')$$

и приводит к преобразованиям

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_0; \quad \sqrt{\frac{3}{2}} z_{ij} = \beta_{ij}^k z_k; \quad \sqrt{\frac{3}{2}} z_k = \beta_k^{ij} z_{ij}, \quad (9.44)$$

причем матрицы β_{ij}^k и β_k^{ij} определяются одной и той же табл. 4.

Если в точке x среды задан процесс деформации (9.8) $Z = \tilde{\mathfrak{E}}$, значит он имеет заданную траекторию в 6-мерном пространстве вектора деформаций $\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{e}$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{e}(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad (9.45)$$

Таблица 4

$i \backslash j$	k	0	1	2	3	4	5
11	$1/\sqrt{2}$	$\cos \beta_0$	$\sin \beta_0$	0	0	0	0
22	$1/\sqrt{2}$	$-\sin(\beta_0 + \pi/6)$	$\cos(\beta_0 + \pi/6)$	0	0	0	0
33	$1/\sqrt{2}$	$\sin(\beta_0 - \pi/6)$	$-\cos(\beta_0 - \pi/6)$	0	0	0	0
12, 21	0	0	0	$\cos \pi/6$	0	0	0
23, 32	0	0	0	0	$\cos \pi/6$	0	0
31, 13	0	0	0	0	0	0	$\cos \pi/6$

которая характеризуется шестью внутренними геометрическими параметрами — длиной дуги s и пятью компонентами $\kappa_k(t)$ тензора кривизны κ траектории процесса

$$ds(t) = |de| = V \dot{e}_h \dot{e}_h dt = V \dot{e}_{ij}(t) \dot{e}_{ij}(t) dt, \quad s(t) = \int_{t_0}^t |de(\tau)|, \quad (9.46)$$

$$\kappa_m(t) = f_m \left(\left| \frac{d^2 e}{ds^2} \right|, \left| \frac{d^3 e}{ds^3} \right|, \dots, \left| \frac{d^{m+1} e}{ds^{m+1}} \right| \right) \quad (m=1, 2, \dots, 5),$$

где f_m — известные функции указанных производных (см. § 18); а также ориентацией траектории в пространстве E_6 , т. е. ориентацией репера Френе в начале процесса $t=t_0$, $s=0$, иначе говоря — ортогональными преобразованиями процесса в 6-мерном пространстве $e'(t) = Oe(t)$, где O — постоянная матрица $O^T O = I$, зависящая от $6 \times 6 = (6+5+4+3+2+1) = 15$ параметров. Заметим, что преобразование лагранжевой системы координат в теле принадлежит к указанным преобразованиям в E_6 .

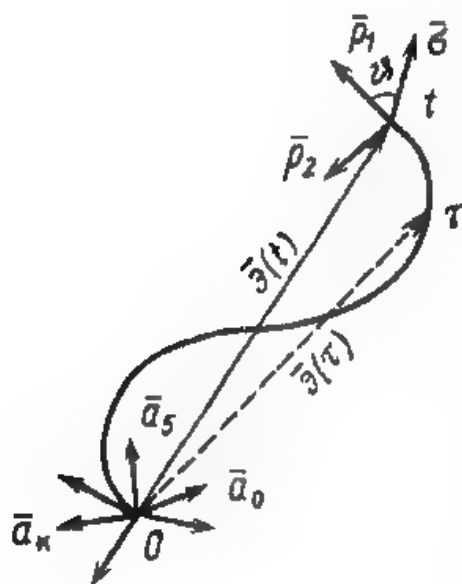


Рис. 9.1

В каждой точке s (момент t) на траектории деформации $z = z(s)$ в E_6 можно изобразить соответствующий оператору (9.11) $\dot{Y} = \dot{S}$ вектор напряжения $y = S$; получается аналог образа процесса деформации в E_6 движению материальной точки по траектории $r = r(t)$ под действием силы $\mathcal{P}(t)$. За время dt совершаемая работа $\mathcal{P} dr$ соответствует скалярному произведению

$$y dz = S_h \dot{e}_h dt = S^{ij} de_{ij}, \quad (9.47)$$

т. е. работе внутренних сил в единице объема за время dt в точке $x = \text{const}$ среды (рис. 9.1). Этот образ процесса подробнее рас-

смотрен в гл. V. Здесь отметим лишь, что если в E_6 установлено квазилинейное соотношение

$$y = c_k z_k^* \quad (k=0, 1, \dots, 5), \quad (9.48)$$

z_k^* — линейный по t оператор над z , а c_k сохраняются при преобразовании матрицей β_{ij}^k , то (9.48) дает

$$y_{ij} = c_k (z_k)_{ij}. \quad (9.48')$$

§ 10. ОСНОВНОЙ ПОСТУЛАТ МСС И ТЕРМОДИНАМИКА

Состояние вещества среды (окрестности точки $x = \text{const}$) определяется переносным движением окрестности (векторы перемещения u , скорости v , ускорения w , вихря ω) и внутренними характеристиками (температура T , векторы E , D , H , B , тензоры $\tilde{\epsilon}$, \tilde{S} , \tilde{V}), изменяющимися во времени. Все эти параметры считаются однозначными функциями x , t , т. е. среда локально макроскопически однородна. В МСС могут рассматриваться и n -значные параметры для макроскопически неоднородных n -фазных сред.

При изучении уравнений состояния и термодинамики вещества переносным движением окрестности x можно пренебречь, если рассматривать постоянную достаточно малую массу Δm и объем ΔV

$$\Delta m_g = \rho_g \Delta V = \int_{\Delta V} \rho dV.$$

При этом с любой заданной точностью внешние силы, действующие по границе $\Delta \Sigma$, взаимно уравновешены, т. е. $\Delta \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha'' - \mathcal{P}_\alpha' = 0$ (a) $\rightarrow 0$ (3.11),

$$\int_{\Delta \Sigma} \mathbf{P}^{(v)} d\Sigma = 0, \quad \int_{\Delta \Sigma} \mathbf{x} \times \mathbf{P}^{(v)} d\Sigma = 0,$$

с точностью $o(a)$, так как объемные интегралы имеют еще более высокий порядок малости. Нарушение условий $\Delta \mathcal{P}_\alpha = 0$ (a) $\rightarrow 0$ происходит на поверхностях разрывов (см. § 11). В этом смысле непрерывные процессы, происходящие в частице среды, называются *равновесными*. В принципе такой выбор ΔV возможен и в эксперименте для *квазиравновесных процессов*. Работа внешних сил сведется только к работе поверхностных сил за счет деформаций объема ΔV . Но из (8.28)

$$\delta' \tilde{A}_e = \int_{\Delta \Sigma} \mathbf{P}^{(v)} v \delta t d\Sigma \approx \int_{\Delta V} S^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \approx S^{ij} \delta \epsilon_{ij} \Delta V, \quad (10.1')$$

и потому отнесенная к единице объема *мощность внешних сил численно равна мощности внутренних напряжений*

$$\frac{\delta' \tilde{A}_e}{\Delta V \delta t} \equiv \frac{\delta' A}{\delta t} = S^{ij} V_{ij}, \quad (10.1)$$

$$\delta' A = S^{ij} \delta e_{ij} = \sigma^{ij} v_{ij} \delta t$$

Вследствие непрерывности компонент v_{ij} , σ^{ij} по x очевидно, что величина $-\delta' A = -S^{ij} \delta e_{ij}$ представляет работу рассматриваемой системы (массы Δm_g), сообщаемую через границу $\Delta \Sigma$ окружающей среде за время δt .

Приток тепла к частице в МСС характеризуется, во-первых, *теплопроводностью и полем вектора потока тепла* $q(x, t)$ или $q(x, t)$, причем по определению вектора q *приток тепла* через замкнутую поверхность $\Delta \Sigma$ к заключенной внутри ΔV массе за время δt равен

$$\delta' \tilde{Q}_T = - \int_{\Delta \Sigma} q_n d\Sigma \delta t = - \int_{\Delta \Sigma} q_n d\Sigma \delta t. \quad (10.2')$$

Во-вторых, *местным источником тепла* мощности ρq_v в секунду на единицу объема различной физико-химической природы.

Преобразуя интеграл (10.2') в объемный, получим

$$- \int_{\Delta \Sigma} q_n d\Sigma \delta t = - \delta t \int_{\Delta V} \operatorname{div} q dV \approx \int_{\Delta V} \delta' Q dV \approx \delta' Q_T \Delta V. \quad (10.2)$$

Следовательно, величину

$$\delta' Q = - \operatorname{div} q \delta t \approx \delta' Q_T = \delta' \tilde{Q}_T / \Delta V \quad (10.3)$$

можно назвать *плотностью притока тепла за время δt* , а величину $\delta' \tilde{Q}_T$ — *притоком тепла к массе Δm_g от окружающей среды*; численно она равна притоку тепла через границу $\Delta \Sigma$, а с обратным знаком, т. е. $-\delta' \tilde{Q}_T \approx \operatorname{div} q \delta t \Delta V$, равна количеству тепла, выделяемому массой Δm_g в окружающую среду. В лагранжевых и эйлеровых координатах имеем

$$\operatorname{div} q = \nabla_i q^i(x, t) = \frac{1}{A} \frac{\partial (A q^i)}{\partial x^i} = \frac{\partial Q_i(x, t)}{\partial x^i}, \quad q^i = q \varepsilon^i, \quad Q_i = q \varepsilon_i. \quad (10.3')$$

Размерность вектора q выбирается так, чтобы величина $\delta' Q_T$ имела размерность работы, $\delta' Q_T / \delta t$ — *мощности на единицу объема*.

Приток тепла $\delta' Q_T$ в МСС рассматривается как *тепловая энергия, сообщаемая в единицу объема среды за время δt окружающей этот объем средой*. Предполагается, что $\delta' Q_T$ можно определить в опытах с помощью калориметрических измерений, основанных на измерении *температуры* $T(x, t)$ или $T(x, t)$. Подобно тому как работе $\delta' A$ соответствует изменение макроскопических характеристик механического состояния δe_{ij} , предпола-

гается, что количеству тепла $\delta'Q_T$ соответствует изменение макроскопической характеристики состояния $\delta\eta$, так что

$$\delta'Q_T = \rho T \delta\eta, \quad (10.3'')$$

причем η называется плотностью энтропии. Физический смысл величин T , η как статистических характеристик внутреннего состояния частицы Δm_g (системы S_N) выяснен в § 2; T пропорциональна средней кинетической энергии хаотического движения частиц системы, η — среднему значению логарифма функции распределения. Предполагается, что макроскопическое состояние вещества в окрестности точки $x = \text{const}$ среды характеризуется некоторым набором макроскопических независимых между собой параметров процесса $\Pi(\tau)$, заданного на интервале $t_0 \leq \tau \leq t$, и соответствующим набором независимых между собой параметров реакции $R(t)$, определенной в момент $\tau = t$.

Полный набор параметров термомеханического процесса и соответствующий набор параметров реакции представляются, например, парами

$$\Pi(\tau) = (T(\tau), \tilde{\mathcal{E}}(\tau)), \quad R(t) = (\eta(t), \tilde{S}(t)); \quad t_0 \leq \tau \leq t,$$

или другими, отмеченными в конце параграфа.

Полный набор Π и соответствующий набор R для термо-электро-магнито-механических процессов в МСС получается из предыдущих дополнением векторов электрической и магнитной индукции $\mathbf{D}(\tau)$, $\mathbf{B}(\tau)$ в состав $\Pi(\tau)$ и самих электрического и магнитного векторов $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ — в $R(t)$.

В общем случае будем считать, что полный набор параметров процесса и соответствующей реакции получается дополнением термомеханических параметров параметрами $\beta_\Pi(\tau) = \beta(\tau)$ и $\beta(t)$:

$$\Pi(\tau) = (T(\tau), \tilde{\mathcal{E}}(\tau), \beta(\tau)), \quad R(t) = (\eta(t), \tilde{S}(t), \beta(t)), \quad (10.4')$$

причем они согласуются с совокупностью опытных фактов.

В основу термодинамики и теории уравнений состояния в МСС положен принцип, называемый (основным) постулатом макроскопической определенности: для данного вещества макроскопическое состояние, т. е. реакция $R(t)$ и любая макроскопическая величина в точке $x = \text{const}$, в момент t однозначно определяется процессом $\Pi(\tau)$. В нем содержится утверждение локальной определенности состояния, т. е. независимости $R(t)$ в точке x от $\Pi(\tau)$ в других точках ($x' = x + \xi$), и полноты системы внутренних (в смысле МСС) параметров $\tilde{\mathcal{E}}$, T , β .

Следовательно, существует определяемый только физической природой среды и не зависящий от $\Pi(\tau)$ оператор по времени (см. § 9) $R^t(\dots)$, такой, что

$$R(t) = R^t(\Pi(\tau)). \quad (10.4'')$$

Оператор $R^t(\Pi)$ связан с лагранжевой системой координат x , выбранной при $t=t_0$ в среде, которая может быть анизотропной, и анизотропия может изменяться со временем. Поэтому преобразование оператора R^t при ортогональных преобразованиях лагранжевой системы координат x может быть сложным. Только в случае начально изотропных сред при ортогональном преобразовании $\Pi = O\Pi'$, $R = OR'$ из (10.4'') получим $R' = R^t(\Pi')$, в общем случае $R' = O^T R^t(O\Pi') \neq R^t(\Pi')$.

Для определенности ниже в основном будем иметь в виду термомеханические процессы, для которых параметры β отсутствуют. Интуитивно справедливость постулата можно пояснить заменой поверхности $\Delta\Sigma$ частицы Δm_g совершенно непроницаемыми для внутренних частиц плоскими безынерционными стенками и представлением $\tilde{\mathcal{E}}(\tau)$, $T(\tau)$ в виде заданного закона движения стенок и изменения во времени постоянной по объему температуры. Кажется почти достоверным, что при этом «отдача» («отклик на Π ») системы через стенки во внешнюю среду будет определяться только природой среды, т. е. среднее давление на каждую стенку и выделение тепла однозначно ею определяются.

В термодинамике удобнее тензор напряжений Коши — Лагранжа \tilde{S} отнести к плотности ρ , переобозначив $\tilde{\sigma}(x, t) = \tilde{S}(x, t)/\rho$, так что (10.4'), (10.4'') перепишем в виде

$$t_0 \leq \tau \leq t: \quad \Pi(\tau) \equiv (\tilde{\mathcal{E}}(\tau), T(\tau)), \quad (10.4)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{S}/\rho, \quad R(t) \equiv (\tilde{\sigma}(\tau), \eta(\tau)) = R^t(\Pi(\tau)).$$

Из основного постулата и определения вектора напряжений на границе $P^v = S^i v_i$, работы и притока тепла как интегралов

$$\delta' A_s \equiv \int_{\Delta\Sigma} P^{(v)} v \delta t d\Sigma = \delta' A \Delta V, \quad \delta' Q_T \equiv - \int_{\Delta\Sigma} q_n \delta t d\Sigma, \quad (10.5)$$

которые в принципе в квазистатических опытах можно измерить для любых процессов, тензор напряжений \tilde{S} , мощность $\delta' A/\delta t$ и скорость притока тепла $\delta' Q_T/\delta t$ будут определенными функционалами процесса, однозначно определяемыми природой вещества

$$\frac{\delta' A}{\rho \delta t} = f_A^t(\Pi(\tau)) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_A^t(\Pi(\tau)),$$

$$\frac{\delta' Q_T}{\rho \delta t} = f_T^t(\Pi(\tau)) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_T^t(\Pi(\tau)) \equiv T(t) \frac{\partial}{\partial t} \eta^t(\Pi(\tau)), \quad (10.6)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{f}_t(\Pi(\tau)), \quad \sigma^{ij} = \frac{1}{\rho} S^{ij} = f^{ij}(\Pi(\tau)),$$

$\eta^t(\Pi)$ называется функционалом энтропии. Выделение множителя $\rho = \rho_0 \sqrt{g}$ не вносит ограничений, так как определитель g вы-

ражается через тензор $\tilde{\epsilon}$. Представление функционалов или операторов, зависящих от параметра (см. § 9), в виде производных по параметру t от других функционалов, принятое в (10.6), не накладывает на них других ограничений, кроме условий интегрируемости f_A, f_T по времени t . Предполагается существование интегралов

$$\Phi_A(t) = \int_{t_0}^t f_A[\tilde{\epsilon}(\xi), T(\xi)] d\tau, \quad (10.7)$$

$$\Phi_T(t) = \int_{t_0}^t T d\eta(\tau) = \int_{t_0}^t f_T[\tilde{\epsilon}(\xi), T(\xi)] d\tau,$$

которые с обратными знаками ($-\Phi_A, -\Phi_T$) можно назвать *механической энергией и тепловыделением* в точке $x = \text{const}$, передаваемыми за время $t - t_0$ частицей постоянной массы с единичным начальным объемом и начальной плотностью $\rho_0 = \rho(t_0) = \rho \Delta V$ в окружающую среду через ее границу. Последняя строка равенств (10.6), устанавливающая связь между тензорами напряжений, деформаций и температурой, называется уравнениями состояния.

Внося в (10.6) выражение $\delta'A/\delta t$ (10.1) через мощность внутренних напряжений, получим соотношение

$$\sigma^{ij} e_{ij} = \frac{1}{\rho} S^{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_A, \quad (10.8)$$

которое при подстановке в него функционалов f^{ij} (10.6) должно быть тождеством для любого t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_A = f^{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}. \quad (10.8')$$

Введенные скаляры и тензоры записывались выше как функции времени t для точки $x = \text{const}$, чтобы подчеркнуть, что рассматриваемые функционалы f и Φ — операторы по параметру τ в интервале $t_0 \leq \tau \leq t$ над $\Pi(\tau)$, т. е. тензором деформаций $\tilde{\epsilon}$ и температурой T в той же точке $x = \text{const}$. Эти функционалы зависят от x лишь потому, что в конечной области G пространства определены поле $\tilde{\epsilon}$ и поле T , т. е. функции x, t

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(x, \tau), \quad T = T(x, \tau), \quad t_0 \leq \tau \leq t, \quad x \in G. \quad (10.9)$$

В области G определено также поле вектора потока тепла $q(x, t) = Q(x, t)$. На основании соотношения (10.3) из (10.6) получаем *уравнение распространения тепла*

$$\rho T \frac{\partial}{\partial t} \eta^t(\Pi(x, \tau)) = -\text{div } q, \quad (10.10)$$

или

$$\rho \frac{\partial \Phi_T}{\partial t} = \rho f_T = -\operatorname{div} q.$$

Сумма

$$\Phi_A + \Phi_T = u^i (\Pi(x, \tau)) \quad (10.11)$$

называется *функционалом внутренней энергии*, или *внутренней энергией*. Из (10.6) получаем закон сохранения энергии

$$\rho du = \delta' A + \delta' Q_T, \quad (10.12)$$

из которого после подстановки выражений $\delta' A$, $\delta' Q_T$ получаем функциональное уравнение в лагранжевых координатах

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = S^{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} - \operatorname{div} q. \quad (10.13)$$

Из уравнений (10.10) и (10.13) находим *основное термодинамическое равенство (тождество)*, связывающее работу внешних сил с функционалами внутренней энергии и энтропии

$$\delta u - T \delta \eta = \frac{1}{\rho} \delta' A; \quad \frac{1}{\rho} \delta' A = \tilde{\sigma} \delta \tilde{\xi} = \sigma^{ij} \delta e_{ij}, \quad (10.14)$$

где символ δ означает приращение (дифференциал) по времени. В частности, из (10.5') и (10.6) находим коэффициент теплопроводности при постоянных деформациях:

$$c_e = T \frac{\partial \eta / \partial t}{\partial T / \partial t} = \frac{d \Phi_T}{dT} \geq 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \tilde{\xi}(t)}{\partial t} = 0. \quad (10.15)$$

Поле вектора потока тепла $q(x, t)$ в МСС определяется полем температуры $T(x, t)$, а именно пространственным градиентом температуры

$$g \equiv \operatorname{grad} T = (\nabla_m T) \mathfrak{E}^m \equiv \frac{\partial T}{\partial x^m} \mathfrak{E}^m = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x^i} e_i, \quad (10.16)$$

причем q направлен в обратную сторону по отношению к $\operatorname{grad} T$, т. е. в сторону убывания T . Вектор g может быть включен в число параметров процесса $\Pi(\tau) = (\tilde{\xi}(\tau), T(\tau), g(\tau))$, а поток тепла — в реакцию $R(t) = (\tilde{\sigma}(t), \eta(t), q(t))$. Но тогда только компонента q будет иметь вид

$$q(t) = f_q^i(\tilde{\xi}, T, g), \quad (10.17)$$

причем по закону Фурье в Л:

$$q(t) = -\tilde{\Lambda} g(t); \quad \tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}_i(\tilde{\xi}, T);$$

$$q^i(x, t) = -\Lambda_i^{ij}(\tilde{\xi}(x, \tau), T(x, \tau)) \nabla_j T(x, t). \quad (10.17')$$

В эйлеровом пространстве $\mathfrak{E}(x, t)$:

$$q(x, t) = Q^i(x, t) e_i,$$

$$Q^i(x, t) = -\lambda^{ij}(x, t) \partial T(x, t) / \partial x^j, \quad (10.17'')$$

причем переход от (10.17') к (10.17'') связан с преобразованием матрицы $\tilde{\Lambda}$ от \mathcal{L} к \mathfrak{E} (§ 9).

$\tilde{\Lambda}$ — положительно определенная матрица *теплопроводности*, определяемая природой вещества, зависящая, вообще говоря, от T , $\tilde{\mathcal{E}}$ и, может быть, даже q :

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(T, \tilde{\mathcal{E}}, g); \quad (10.18)$$

она предполагается известной на основании специальных измерений теплопроводности вещества с использованием закона Фурье (10.17). Для изотропных сред часто предполагают:

$$\lambda^{ij} = \lambda \delta_{ij}, \quad \Lambda^{ij} = \lambda g^{ij}, \quad q = -\lambda g, \quad (10.18')$$

причем скаляр λ зависит только от температуры и плотности

$$\lambda(x, t) = \lambda(x, t) = \lambda(\rho, T).$$

На основании (10.10) получается *уравнение теплопроводности* в (\mathcal{L}) и (\mathfrak{E}) в виде

$$\begin{aligned} \rho T \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(\tilde{\Lambda} \operatorname{grad} T(x, t)) + \rho q_B, \\ \rho T \frac{d\eta(x, t)}{dt} &= \operatorname{div}(\tilde{\Lambda} \operatorname{grad} T) + \rho q_B \end{aligned} \quad (10.19)$$

или через функционал $u(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ в лагранжевых координатах в виде (10.13).

В § 3 (V) дано другое представление второй строки формул (10.6), сводящееся к замене функционала Φ_T суммой двух других, и уравнения теплопроводности в виде

$$\begin{aligned} T \dot{\eta} &= T \dot{s} - w^*, \\ \rho T \frac{\partial s}{\partial t} &= \operatorname{div}(\tilde{\Lambda} \operatorname{grad} T) + \rho w^*. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Определение $s(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ и $w^*(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ через η , следовательно, неоднозначно и требует дополнительного условия, которое конкретизируется для различных сред или процессов заданием функционала

$$w^* = w_i^*(\Pi(\tau)) \geq 0, \quad (10.21)$$

называемого *рассеянием*. Из (10.20), (10.6), (10.14) следует, что

ω^* имеет размерность мощности на единицу массы. Из (10.6) и (10.20) следует соотношение

$$\rho T ds = \delta' Q_T + \rho \omega^* dt, \quad (10.22)$$

называемое в МСС *уравнением баланса энтропии*, а $s(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ — энтропией. Из (10.12) и (10.22) следует

$$\begin{aligned} \rho (d\psi + s dT) &= \delta' A - \rho \omega^* dt, \\ \delta' A &= S'^i de_{i/}, \quad \psi = u - Ts. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Сопоставление равенств (10.12), (10.22), (10.23), аналогичных полученным в статистической механике для равновесных обратимых процессов (§ 2), во-первых, дает некоторое основание для принятой выше терминологии (внутренняя энергия, энтропия, ψ — функционал свободной энергии); во-вторых, позволяет определить в МСС *макрообратимые термомеханические* процессы как такие, в которых рассеяние равно нулю ($\omega^* \equiv 0$), и функционалы энергии и энтропии являются *функциями* мгновенного состояния процесса $\Pi(t) \equiv (\tilde{\mathcal{E}}(t), T(t))$ в момент $\tau = t$, т. е.

$$\begin{aligned} \omega^* &\equiv 0; \quad R(t) = R^t(\Pi(\tau)) \equiv R(\Pi(t)), \\ u(t) &= u(\Pi(t)), \quad \psi(t) = \psi(\Pi(t)), \quad s(t) = s(\Pi(t)). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Поскольку функционал $R^t(\Pi(\tau))$ является непрерывным для любых физических процессов, он — *функция линейных функционалов* процесса (§ 9)

$$\begin{aligned} \mu(t) &\equiv (m_0(t), m_1(t), \dots, m_n(t)) = \mu^t(\Pi(\tau)) \equiv \\ &\equiv (m_0^t(\Pi(\tau)), \dots, m_n^t(\Pi(\tau))) \end{aligned}$$

или

$$m_k(t) = m_k^t(\Pi(\tau)), \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (10.25)$$

Здесь $m_k^t(\Pi)$ — линейные функционалы (линейные операторы) над $\Pi(\tau)$. Например (§ 9),

$$\mu(t) = \mu^t(\Pi(\tau)) = \int_{t_0}^t \dot{\Pi}(\tau) d_\tau \tilde{H}_\Pi(t, \tau), \quad (10.25')$$

$$m_k(t) = \int_{t_0}^t \dot{\tilde{\mathcal{E}}}(\tau) d_\tau \tilde{H}_e^k(t, \tau) + \int_{t_0}^t \dot{T}(\tau) d_\tau \tilde{H}_T(t, \tau),$$

где $\tilde{H}(t, \tau)$ — тензор (или матрица-функция (t, τ)) с ограниченным дифференциалом по τ .

Менее общим* является предположение, что $u(t)$, $\psi(t)$, $s(t)$ — функции («внутренних», «структурных», «микроскопических»...) «параметров состояния» $m_k = \mu_k(t)$, подчиняющихся эволюционным уравнениям $\dot{\mu} = \omega(\mu, \Pi(t))$,

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = \omega_k(\mu(t), \Pi(t)) \quad (k=0, 1, \dots), \quad (10.25'')$$

где $\omega(\mu, \Pi)$ — выбираемые из различных физических, нередко интуитивных и качественных, соображений функции. Импонирует гипотеза, что скорость роста объемной плотности величины $\mu(t, x)$ (трещин — в твердом теле или воздушных пузырьков — в воде и т. п.) является какой-то функцией самой $\mu(t)$ и параметров процесса $\Pi(t)$ или реакции $R(t)$ (10.5).

Соотношения (10.25'') нередко дополняются гипотезой о функции рассеяния и работе

$$\begin{aligned} \omega^*(t) &= \omega_k(\mu(t), \dot{\mu}(t)) \dot{\mu}_k(t), \\ \frac{1}{\square} \delta' A &= P_k d\mu_k \quad (k=0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (10.26)$$

после чего из (10.14) и (10.20) получается уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mu_k} + T \frac{\partial s}{\partial \mu_k} - \omega_k - P_k \right) d\mu_k = 0, \quad (10.27')$$

решение которого предполагается в виде

$$P_k = \frac{\partial u}{\partial \mu_k} + T \frac{\partial s}{\partial \mu_k} - \omega_k. \quad (10.27'')$$

Параметры типа μ могут относиться к числу параметров $\beta(\tau)$, β_R в (10.5).

Все функционалы (10.25), (10.25'), (10.25'') являются параметрами термомеханической природы, и соответствующие им определяющие уравнения приводимы к виду (10.5).

В случае (10.24) уравнения состояния имеют вид согласно (10.14)

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathcal{E}}}, \quad \sigma^I = \frac{\partial \psi}{\partial e_{ij}}, \quad \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (10.27)$$

Но без экспериментального изучения конкретной сплошной среды, ее структуры и свойств, которые и могут быть отражены параметрами типа (10.25'), (10.25''), нельзя указать прямых опытов, которые позволили бы установить число и выражение параметров состояния через характеристики процесса $\tilde{\mathcal{E}}(t)$, $T(t)$. В частности, в равновесных опытах с постоянными по объему и

* Сравнительно с (10.25).

меняющимися во времени параметрами состояния $T(t)$, $\mu_n(t)$, $\delta'Q_T$ выражение (10.2) на основании (10.22) преобразуется к виду (при $w^* = 0$)

$$\delta'Q_T = \int_V \rho T \frac{ds}{dt} dV \delta t = T dS_g, \quad S_g = \int_{V_g} \rho s dV = \rho s V,$$

т. е. $\delta'Q_T$ имеет интегрирующий множитель T^{-1} :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{T} \delta'Q_T = S_g(T_2, \mu_n^2) - S_g(T_1, \mu_n^2). \quad (10.28)$$

Этот интеграл зависит не от того, по какому закону во времени подается тепло $\delta'Q_T$ и изменяются параметры μ_n , а только от конечных и начальных значений параметров. Равенство (10.28) и служит для нахождения энтропии $s(T, \mu)$. Аналогичное равенство, вытекающее для рассматриваемого объема из (10.12), служит для определения внутренней энергии $u(T, \mu)$. Но для нахождения числа и физического смысла параметров μ в макроопытах могут быть полезны лишь функционалы (10.6), так как параметры в силу основного постулата должны преобразовывать функционалы процесса (10.25) в функции этих параметров.

Для необратимых процессов основное термодинамическое тождество (10.14) может быть преобразовано к общему виду, если обобщить определение процесса $\pi(\tau)$, реакции $r(t)$ и скалярного потенциала V^t , которые до этого принимались $\pi = \Pi$, $r = R$, $V^t = u^t$. Тожественные преобразования дают

$$\begin{aligned} dw &\equiv du - T d\eta - \tilde{\sigma} d\tilde{\xi} \equiv d\psi_\eta + \eta dT - \tilde{\sigma} d\tilde{\xi} \equiv \\ &\equiv d\varphi - T d\eta + \tilde{\sigma} d\tilde{\xi} \equiv d\chi + \eta dT + \tilde{\sigma} d\tilde{\xi} = 0, \end{aligned} \quad (10.29')$$

где

$$\begin{aligned} \psi_\eta &= u - T\eta, \quad \varphi = u - \tilde{\sigma}\tilde{\xi}, \\ \chi &= u - T\eta - \tilde{\sigma}\tilde{\xi} = \psi_\eta - \tilde{\sigma}\tilde{\xi} = \varphi - T\eta. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Отсюда, выбирая различные допустимые пары процессов π и соответствующих реакций r , получим всегда

$$\dot{w}^t(\pi(t)) \equiv \dot{V}^t(\pi) - r_{(n)}^{(t)} \dot{\pi}(t) = 0 \quad (10.30)$$

для произвольного $\pi(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$. При этом процессы π , реакции r^t и скалярный функционал V^t определяются таблицей 5 функций (π, r, V) .

Объекты π , r можно рассматривать как (4×4) квадратные матрицы или семимерные (7-мерные) ортогональные векторы (§ 9)

Таблица 5

	π	r	V^t	$V(t) = V^t$
1	$(\eta, \tilde{\sigma})$	$(T, \tilde{\sigma})$	u^t	u
2	$(\eta, \tilde{\sigma})$	$(T, -\tilde{\sigma})$	φ^t	$\varphi = u - \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}$
3	$(T, \tilde{\sigma})$	$(-\eta, \tilde{\sigma})$	ψ_η^t	$\psi_\eta = u - T\eta$
4	$(T, \tilde{\sigma})$	$(-\eta, -\tilde{\sigma})$	χ^t	$\chi = \psi_\eta - \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}$
5	$(u, \tilde{\sigma})$	$(T^{-1}, -T^{-1}\tilde{\sigma})$	η^t	η

$$\pi = (\pi_0, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_5) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \pi_0 & 0 \\ 0 & \|\pi^{mn}\| \end{vmatrix}; \quad (10.31)$$

$$r = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ r_0 & 0 \\ 0 & \|r^{mn}\| \end{vmatrix} = (r, r_0, r_1, \dots, r_5) \quad (m, n=1, 2, 3)$$

со скалярным умножением

$$\dot{r}\pi = \tilde{r}\tilde{\pi} = \overset{0}{r}_0 \overset{0}{\pi}_0 + r_0 \dot{\pi}_0 + \dots + r_5 \dot{\pi}_5 = \overset{0}{r}_0 \overset{0}{\pi}_0 + r^{mn} \dot{\pi}_{mn}, \quad (10.32)$$

причем π_0, r_0 — первые элементы (скаляры) в столбцах таблицы; π_{mn}, r^{mn} — компоненты тензоров, указанных в столбцах π, r ; $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_5)$ и (r_0, r_1, \dots, r_5) — построенные согласно § 9 по тензорам π и r шестимерные ортогональные векторы (деформаций и напряжений, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$, или наоборот — согласно таблице).

Например, в третьей строке таблицы:

$$\begin{aligned} \pi(\tau) &= (T, \tilde{\sigma}), \quad r = r^t = (-\eta, \tilde{\sigma}); \quad V^t = \psi_\eta^t; \\ \overset{0}{\pi}_0 &= T, \quad \overset{0}{r}_0 = -\eta; \quad \pi_{mn} = \varepsilon_{mn}, \quad r^{mn} = \sigma^{mn}; \\ \overset{0}{r}_0 \overset{0}{\pi}_0 &= -\eta \dot{T}, \quad r^{mn} \dot{\pi}_{mn} = \sigma^{mn} \dot{\varepsilon}_{mn}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Уравнение (10.30) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^t &= \dot{\psi}_\eta^t(\pi(\tau)) - r^t(\pi) \dot{\pi}(t) = 0; \\ r^t(\pi) \dot{\pi} &= -\eta^t(\pi) \dot{T}(t) + \sigma_t^{mn}(\pi) \dot{\varepsilon}_{mn}(t). \end{aligned} \quad (10.34)$$

Если ввести в него вместо η рассеяние w^* и энтропию s (10.20) и функцию ψ (10.23), положив

$$u = \psi_{\eta} + T\eta = \psi + Ts, \quad T\dot{\eta} = T\dot{s} - \dot{w}^*, \quad (10.35)$$

сохранив процесс $\pi = (T, \tilde{\mathcal{E}})$ и введя реакцию $r_s = (-s, \tilde{\sigma})$, получим основное термодинамическое тождество (10.23) в виде

$$\dot{\psi}^t(\pi) - r_s^t(\pi) \dot{\pi}^t(t) + w^* = 0; \quad \pi \equiv (T, \tilde{\mathcal{E}}), \quad r_s \equiv (-s, \tilde{\sigma}). \quad (10.36)$$

Все параметры, входящие в уравнение (10.30) и в таблицу (π, r, V) , могут быть измерены в \mathcal{M} -опытах; предполагается, что именно по данным этих \mathcal{M} -опытов и построен функционал $V^t(\pi)$, вследствие чего (10.30) и называется тождеством. Здесь полная аналогия с законом Ньютона $m\ddot{r} = F^t(r(\tau))$. «Образцы сплошной среды» нередко практически недоступны для \mathcal{M} -опытов, но некоторые закономерные проявления ее свойств в некоторых натуральных условиях имеются. Тогда можно принять некоторую гипотезу о виде одного скалярного функционала $V^t(\pi)$, например энергии $u^t(\pi)$, и если из тождества (10.30) найти уравнения состояния, т. е. реакцию $r^t(\pi)$, то решить соответствующую натурному явлению задачу МСС; сравнение результатов с известными закономерными проявлениями позволит оценить правильность гипотезы. Этот путь научного познания древнее наших наук.

Определение реакции $r(\pi)$, т. е. уравнений состояния среды, из тождества (10.30) по одному заданному функционалу $V^t(\pi)$, следовательно, представляется необходимым, как и выбор этого функционала с учетом свойств довольно большого числа уже известных в МСС.

Вид тождества (10.36) может быть придан тождеству (10.30) применительно к любой строке таблицы (π, r, V) ; он отличается выделенным слагаемым $w^* \geq 0$, имеющим много названий: *рассеяние, диссипация, некомпенсированное тепло* и т. д. Как уже сказано, все параметры, входящие в таблицу (π, r, V) и (10.30), в принципе могут быть измерены в \mathcal{M} -опытах, но этого нельзя сказать о $w^* = T(\dot{s} - \dot{\eta}) \geq 0$ и об энтропии s : измерим функционал энтропии $\eta^t(\pi)$, но не $s^t(\pi)$ и w^* по отдельности. Эта неопределенность породила ряд гипотез о существовании вместе с (10.30) еще одного термодинамического уравнения (*kd*).

Целесообразно следующее доопределение функционалов рассеяния w^* и энтропии s , соответствующее сложившимся в МСС представлениям: если в конечном объеме среды возможен стационарный периодический процесс $\Pi(T, \tilde{\mathcal{E}}) = \Pi(x, t) = \Pi(x, t + 2\pi/\omega)$ с частотой ω , то рассеяние w^* и энтропия s для произвольного момента t и любого объема V с границей Σ удовлетворяют условиям доопределения:

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} dt \int_V \rho \omega^* dV = Q_1; \quad Q_1 = \int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} dt \int_{\Sigma} (-qn) d\Sigma; \quad \int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} dt \int_V \rho T \dot{s} dV = 0. \quad (10.37)$$

Здесь Q_1 — количество тепла, выделяемое за один цикл массой объема V через Σ во внешнюю среду.

При заданном функционале $\psi^t(\pi)$ не найдено общего решения уравнения (10.36), т. е. реакции $r_s^t(\pi)$. Но если $\psi^t(\pi)$ имеет дифференциал Фреше, например

$$\psi^t(\pi + \delta\pi) - \psi^t(\pi) \approx \delta\psi^t = \int_{t_0}^t \left(\frac{D\psi^t}{D\pi} \right)_\tau \delta\dot{\pi}(\tau) d\tau, \quad (10.38)$$

и если $\dot{\psi}^t(\pi)$ имеет вид

$$\dot{\psi}^t(\pi) = \left(\frac{D\psi^t}{D\pi} \right)_t \dot{\pi} + \psi_\omega, \quad (10.39)$$

причем для любого процесса функция $\psi_\omega \leq 0$, то (10.36) имеет частное решение, физически допустимое,

$$r_s^t(\pi) = \left(\frac{D\psi^t}{D\pi} \right)_{\tau=t}, \quad \omega^* = -\psi_\omega \geq 0; \quad (10.40)$$

иначе

$$-s = \left(\frac{D\psi^t}{DT} \right)_t, \quad \sigma^{ij} = \frac{1}{\rho} S^{ij} = \left(\frac{D\psi^t}{D\epsilon_{ij}} \right)_t, \quad (10.41)$$

причем необходимо еще выполнение (10.37) для s .

На основе произвола $\pi(\tau)$ в тождестве в форме (10.30) возникает и более строгий подход к определению реакции $r^t(\pi)$.

Поскольку тождество (10.30) справедливо для любого процесса $\pi(\tau)$, оно верно и для $\pi + \delta\pi$, и возникает *вариационный принцип*, на основе которого можно искать решение (10.30) при следующих предположениях и обозначении $\omega = r\pi$.

1. Функции физически допустимых процессов $\pi(\tau)$, реакций $r(\tau)$ с их производными $\dot{\pi}(\tau)$, $\dot{r}(\tau)$ и мощностей $\omega(\tau) = r(\tau)\pi(\tau)$, которые определены на интервале $t_0 \leq \tau \leq t < \infty$, принадлежат линейному функциональному пространству Φ , состоящему из кусочно-непрерывных функций с разрывами в счетном множестве M_0 фиксированных точек полуинтервала $t_0 \leq \tau < t_1$, где $t_1 > t$ — наибольшее значение параметра t .

Для двух любых наборов функций из Φ — $\pi(\tau)$, $\omega(\tau)$, $r(\tau)$ и $\pi'(\tau)$, $r'(\tau)$, $\omega'(\tau)$ — разности процессов, реакций и мощностей

$$\delta\pi(\tau) = \pi'(\tau) - \pi(\tau), \quad \delta r(\tau) = r^i(\pi + \delta\pi) - r^i(\pi),$$

$$\delta\omega(\tau) = \delta(r(\tau) \dot{\pi}(\tau)) = r(\tau) \delta\dot{\pi}(\tau) + \delta r(\tau) \dot{\pi}(\tau) + \delta r(\pi) \delta\dot{\pi}(\tau)$$

принадлежат Φ , причем $\delta\dot{\pi}(\tau) = d/d\tau \cdot \delta\pi(\tau)$.

2. Из тождества (10.30) и определения следует, что для любого фиксированного $\pi(\tau)$ существует функционал $\dot{V}^i(\pi) = \dot{V}^i(t) \in \Phi$, а для любых $\pi(\tau)$, $\delta\pi(\tau)$ — приращение $\delta\dot{V}^i = \dot{V}^i(\pi + \delta\pi) - \dot{V}^i(\pi) = \delta\dot{V}^i(t) \in \Phi$.

3. По определению функционала $r^i(\pi)$, который при заданном $\pi(\tau)$ равен $r(\tau) \in \Phi$, для любых заданных процессов $\pi(\tau)$ и для произвольных процессов $\delta\pi(\tau)$ справедливо тождество

$$\delta\dot{V}^i(t) - \delta\omega(t) = 0. \quad (10.42)$$

Вариационный термодинамический принцип. При заданном функционале \dot{V}^i , определенном на Φ , в фиксированном процессе $\pi(\tau)$ и в произвольном ненулевом процессе $\delta\pi(\tau)$ существуют первые вариации, или ненулевые линейные функционалы $L^i(\delta\pi)$, $L^i(\delta\pi)$, такие, что

$$\dot{V}^i(\pi + \delta\pi) - \dot{V}^i(\pi) = L^i(\delta\pi(\tau)) + o(\delta N),$$

$$r^i(\pi + \delta\pi) - r^i(\pi) = L^i(\delta\pi) + o(\delta N)$$

по некоторой норме δN , определенной на Φ и имеющей вид

$$\sup |k_1 \delta\pi(\tau)| + \sup |k_2 \delta\pi(\tau)|, \quad \tau \in (t_0, t) \setminus M_0,$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ — конечные величины.

При заданном $\dot{V}^i(\pi)$ и $\delta N \rightarrow 0$ функционал реакции $r^i(\pi)$ удовлетворяет функциональному тождеству относительно $\delta\pi$, которое соответствует (10.42)

$$\delta\dot{V}^i(\pi(\tau)) - r^i(\pi(\tau)) \delta\dot{\pi}(t) - \delta r^i(\pi(\tau)) \dot{\pi}(t) = 0. \quad (10.43)$$

Здесь $\delta\dot{V}^i$, δr^i суть L^i , L^i , т. е. первые вариации \dot{V}^i и r^i .

Теорема. Если множество функций $\pi(\tau)$ совпадает с пространством непрерывно дифференцируемых функций, то

$$\delta\dot{V}^i = \int_{t_0}^t \delta\dot{\pi}(\tau) d_\tau v(t, \tau) + a(t) \delta\pi(t_0) \equiv \int_{t_0}^t \delta\dot{\pi}_{i/l}(\tau) d_\tau v^{i/l}(t, \tau) + a^{i/l}(t) \delta\pi_{i/l}(t_0),$$

$$\delta r^i = \int_{t_0}^t \delta\dot{\pi}(\tau) d_\tau \tilde{R}(t, \tau) + \delta\pi(t_0) \tilde{B}(t),$$

$$\delta r^i \dot{\pi}(t) = \int_{t_0}^t \delta\dot{\pi}_{i/l} \dot{\pi}_{k/l}(t) d_\tau R^{i/lk/l}(t, \tau) + \delta\pi_{i/l}(t_0) \dot{\pi}_{k/l}(t) B^{i/lk/l}(t), \quad (10.44)$$

где индексы i, j, k, l принимают значения $0, 1, 2, 3$, вектор $v(t, \tau)$ (известен при данных \dot{V}^i, π) и тензор-функция $\tilde{R}(t, \tau)$ с ограниченной вариацией по τ определены с точностью до аддитивной постоянной (зависящей только от t).

Рассмотрев множество процессов $\delta\pi(\tau)$, проходящих через точку t_0 , получим из (10.43) функциональное уравнение для реакции $\mathbf{r}^i(\pi(\tau))$:

$$v(t, \tau) - \dot{\pi}(t) \tilde{R}(t, \tau) - \mathbf{r}_h(t, \tau) = \mathbf{c}(t), \quad (10.45)$$

где $\mathbf{c}(t)$ — постоянный (по τ) вектор

$$\mathbf{c}(t) = v(t, t) - \dot{\pi}(t) \tilde{R}(t, t) - \mathbf{r}_h(t, t) = v(t, t_0) - \dot{\pi}(t) \tilde{R}(t, t_0) - \mathbf{r}_h(t, t_0)$$

и $\mathbf{r}_h(t, \tau)$ — вектор скачков функционала $\mathbf{r}^i(\pi(\tau))$, который в простейшем случае равен

$$\mathbf{r}_h(t, \tau) = \mathbf{r}(t) h(t, \tau),$$

причем $h(t, \tau) = 1$ при $\tau = t$ и $h(t, \tau) = 0$ при $\tau < t$.

При еще более общих предположениях установлены условия, при которых $\dot{V}^i(\pi) = V_1^i(\pi) \dot{\pi}(t)$ и тождество (10.30) в виде условия ортогональности

$$(V_1^i(\pi) - \mathbf{r}^i(\pi)) \dot{\pi}(t) = 0 \quad (10.46)$$

имеет единственным решением $\mathbf{r}^i(\pi) = V_1^i(\pi)$.

Изложенное выше относится к термомеханическим процессам, определяемым деформациями, напряжениями, энтропией и температурой. Если существуют другие физические поля, определяемые параметрами β_r ($r = 1, 2, \dots$), включающие и структурные типа m_k , в уравнения вносятся поправки. Предполагается, что возникают дополнительные силы, действующие на весь объем мысленно выделенной частицы массы $\rho \Delta V$, совершающие за время δt работу

$$\delta' A_\beta \Delta V = W_\beta \delta t \Delta V,$$

и что возникает дополнительный к $\delta' Q_T$ приток тепла $\rho q_\beta \delta t \Delta V$ за счет проникающего облучения или источника диссипативного характера. Например, в случае электромагнитного поля с электрическим вектором \mathbf{E} и магнитным \mathbf{H} (§ 22)

$$\delta' A_\beta = W_\beta \delta t = (1/4\pi) (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}), \quad (10.47)$$

где \mathbf{D}, \mathbf{B} — векторы электрической и магнитной индукции, т. е. набор параметров β_r состоит из компонент двух векторов: $\beta = (\mathbf{D}, \mathbf{B})$; объемная плотность источника тепла ρq_β представляет джоулево тепло.

Первый и второй законы термодинамики получаются в обобщенном виде:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= S^{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + W_\beta - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q_\beta, \\ \rho T \frac{\partial s}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q_\beta + \rho w^*,\end{aligned}\quad (10.48)$$

причем входящие в них функции или функционалы (u , s , w^* , q_β , ...) определяются процессом изменения функций времени $\tilde{\mathcal{E}}(\tau)$, $T(\tau)$, $\beta(\tau)$.

Интегральная форма первого и второго законов для фиксированной движущейся массы с объемом V_g и поверхностью Σ_g получается из (10.48) интегрированием по объему и из определения внутренней энергии U_g и энтропии S_g рассматриваемой массы:

$$U_g(t) = \int_{V_g} \rho u dV, \quad S_g = \int_{V_g} \rho s dV. \quad (10.49)$$

Из первого равенства (10.48) и (8.29) получаем

$$\begin{aligned}dU_g &= \int_{V_g} (S^{ij} de_{ij} - \operatorname{div} \mathbf{q} dt + W_\beta dt + \rho q_\beta dt) dV = \\ &= \delta' \tilde{A} - dK_g - \int_{\Sigma_g} \mathbf{q} n d\Sigma dt + \delta' \tilde{A}_\beta,\end{aligned}$$

или согласно (10.2')

$$\begin{aligned}d(K_g + U_g) &= \delta' \tilde{A} + \delta' \tilde{Q}_T + \delta' \tilde{A}_\beta, \\ \delta' \tilde{A}_\beta &= \int_{V_g} (W'_\beta + \rho q_\beta) dV dt.\end{aligned}\quad (10.50)$$

Здесь K_g — кинетическая энергия, $\delta' \tilde{A}$ — работа массовых и поверхностных сил, $\delta' \tilde{Q}_T$ — приток тепла, $\delta' \tilde{A}_\beta$ — приток энергии, связанный с параметрами β .

Интегрируя второе уравнение (10.48) с множителем T^{-1} и учитывая преобразование

$$\int_{V_g} \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \int_{\Sigma_g} \frac{1}{T} \mathbf{q} n d\Sigma + \int_{V_g} \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \operatorname{grad} T dV, \quad (10.51)$$

получим интегральную форму закона баланса энтропии

$$dS_g = - \int_{\Sigma_g} \frac{1}{T} \mathbf{q} n d\Sigma dt + \int_{V_g} \frac{1}{T} \left(w^* - \frac{1}{T} \mathbf{q} \operatorname{grad} T + \rho q_\beta \right) dV dt. \quad (10.52)$$

Согласно закону Фурье $-\mathbf{q} \operatorname{grad} T = \hat{\Lambda} (\operatorname{grad} T)^2 \geq 0$. Сумму

$w^* - \mathbf{q} \operatorname{grad} T / T \geq 0$ называют иногда *объемной плотностью не-*

компенсированного тепла в термомеханических процессах. Следствие (10.52) в виде

$$\dot{S}_g + \int_{\Sigma} \frac{1}{T} \mathbf{q} n d\Sigma - \int_{V_g} \frac{1}{T} \rho q_\beta dV \equiv \int_{V_g} \left(\frac{-\mathbf{q} \operatorname{grad} T}{T} + w^* \right) dV \geq 0 \quad (10.53)$$

называют иногда неравенством Клаузиуса—Дюгема. Оно неопределенно, если не определена энтропия S (10.49) или w^* .

Отметим еще одно постулируемое фундаментальное неравенство для замкнутых по деформациям изотермических процессов [13]: работа внутренних напряжений в таких циклах неотрицательна

$$\oint_e S^{ij} d\varepsilon_{ij} \equiv \oint_e \rho \dot{\psi}_\eta^t dt \geq 0, \quad T = \text{const.} \quad (10.54)$$

§ 11. ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МСС

Для малой окрестности физической точки (частицы) среды установлены дифференциальные и интегральные уравнения сохранения массы, импульса (уравнения движения), сохранения энергии, баланса энтропии (уравнение притока тепла), а также уравнения, связывающие тензор напряжения и вектор теплового потока с деформациями, температурой и немеханическими заданными параметрами. Эти соотношения в принципе определяются, и притом однозначно, непосредственно в \mathcal{M} -опытах для всех возможных в частице процессов; поскольку все входящие в эту систему равенств параметры измеряются приборами и системе удовлетворяют, группа параметров, названная реакцией (r), однозначно определяется группой процесса (π). Следовательно, для малой частицы решение существует: $r(t) = r^t(\pi(\tau))$. Поэтому перечисленная система уравнений в МСС называется замкнутой для всех внутренних точек области движения среды.

В частице состояние в любой момент однородно (одинаково во всех точках частицы), поэтому для нее все параметры внутри и на границе частицы одинаковы (деформации, напряжения, температура, градиент температуры и т. д.). В конечных областях движения среды, кроме задания замкнутой системы для внутренних точек, необходимы граничные и начальные условия.

В силу основного постулата МСС решение замкнутой системы уравнений МСС для внутренних точек существует при некоторых начальных условиях ($t=t_0$) и условиях на границе области движения или рассматриваемой области.

Адекватность методов Лагранжа и Эйлера в МСС позволяет пользоваться любым из них. Сначала будем следовать методу Лагранжа и систему координат x_i в начальный момент времени считать декартовой ортогональной. Тензоры напряжений и дефор-

маций по-прежнему обозначим \tilde{S} , $\tilde{\mathcal{E}}$. Общие уравнения МСС для внутренних точек области движения следующие.

1. Уравнения, выражающие тензор деформаций $\tilde{\mathcal{E}}$ и плотность среды ρ через вектор перемещения $u(x, t)$ или $x \equiv \varphi = x + u$ (§ 4):

$$\tilde{\mathcal{G}}: g_{ij} = A_i^k A_j^k; A_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^i}; \rho A = \rho_0; \quad (11.1)$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \text{def } u; e_{ij} = (g_{ij} - \delta_{ij})/2; \sqrt{g} = A = |A_i^k|,$$

Эти уравнения алгебраически выражают e_{ij} и ρ через первые производные $\partial x^i / \partial x^j = A_j^i = \delta_j^i + \partial u^i / \partial x^j$.

2. Уравнения движения, которые эквивалентны одному векторному уравнению (§ 8):

$$\nabla_i S^i + \rho (F - \ddot{x}) = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \ddot{x}, \quad (11.2')$$

причем $F = F(x, t)$ — заданная массовая сила. Уравнения записываются также в виде

$$\rho_0 (\ddot{x}^i - X^i) = \frac{\partial}{\partial x^m} (A A_j^i S^{mj}). \quad (11.2)$$

Структура этих трех скалярных уравнений, очевидно, такова: они линейно связывают между собой напряжения S^{ij} и их первые производные $S_{,k}^{ij}$ со вторыми производными x по времени, а также первыми и вторыми производными x по координатам.

3. В тех случаях, когда за независимые искомые функции принимаются деформации e_{ij} или напряжения S^{ij} , должны быть удовлетворены еще условия совместности (§ 5)

$$R_{lmpr} = 0,$$

где индексы $lmpr$ имеют шесть независимых комбинаций (1221 и т. д.). Тензор кривизны R_{lmpr} алгебраически выражается через e_{ij} , $e_{ij,k}$ и $e_{ij,km}$, причем через вторые производные от e_{ij} — линейно. Эти шесть уравнений кратко запишем в виде

$$R = R(e_{ij}, e_{ij,k}, e_{ij,km}) = 0. \quad (11.3)$$

Существенно, что если, как и сделаем, за независимую искомую функцию принять вектор x или перемещение u , то на основании (11.1) уравнения (11.3) обратятся в тождества и потому могут не рассматриваться.

Следовательно, для вектора u и тензора напряжений S получается только одно уравнение (11.2'), т. е. для девяти функций

$$x^1, x^2, x^3, S^{11}, S^{22}, S^{33}, S^{12} = S^{21}, S^{23} = S^{32}, S^{31} = S^{13}$$

мы из (11.2) имеем только систему трех дифференциальных урав-

нений. Такая система называется *незамкнутой*, т. е. не позволяет найти x и \tilde{S} , каковы бы ни были граничные и начальные условия для x и \tilde{S} .

4. Уравнения состояния (§ 10) дают выражение тензора напряжения \tilde{S} в точке x в момент t через значения тензора деформации $\tilde{\mathcal{E}}(x, \tau)$, температуры $T(x, \tau)$ и параметров $\beta(x, \tau)$ при $t_0 \leq \tau \leq t$ с помощью функционала или оператора $\tilde{\mathcal{F}}$, определяемого только природой среды:

$$\tilde{S}(x, t) = \tilde{\mathcal{F}}[\tilde{\mathcal{E}}, T, \beta]. \quad (11.4')$$

Для многих сред верно и обратное: если задан *процесс нагружения* $\tilde{S} = \tilde{S}(x, t)$, то деформации тем самым определяются однозначно

$$\tilde{\mathcal{E}}(x, t) = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}[\tilde{S}, T, \beta]. \quad (11.4'')$$

Соотношения (11.4') и (11.4'') суть различные формы выражения одного и того же закона связи между напряжениями и деформациями сплошной среды.

В более подробной записи в лагранжевых координатах имеем соотношения

$$\tilde{\mathcal{E}} = (e_{ij}) = \text{def } u, \quad S^{ij} = \mathcal{F}^{ij}[\tilde{\mathcal{E}}(x, \tau), T(x, \tau), \beta(x, \tau)], \quad (11.5)$$

которые представляют для симметричных S^{ij} шесть скалярных уравнений.

Как только установлен закон (11.5) и заданы $T(x, \tau)$, $\beta(x, \tau)$, уравнения (11.2) становятся замкнутыми. Действительно, внося значения S^{ij} в (11.2), получим одно векторное уравнение для вектора $x(x, t)$ или три скалярных уравнения для его трех компонент x^i или u^i . В общем случае это функциональные уравнения, и их структура полностью определяется структурой физического закона (11.5). Для классических сред (идеальные жидкости и газы, упругие тела) это — дифференциальные уравнения, для релаксирующих сред — интегродифференциальные и т. д.

Одно важное общее свойство соотношений (11.5) очевидно: они должны изменяться при ортогональных преобразованиях начальных декартовых координат x^i так, чтобы правильно представлять физические свойства. В общем случае это означает, что в (11.5) кроме указанных переменных $\tilde{S}(t)$, $\tilde{\mathcal{E}}(t)$, $\beta(t)$ должны входить тензоры-константы среды, например тензоры 4-го порядка C_{ijkl} и т. д., являющиеся физическими постоянными вещества в начальный момент $t = t_0$.

Во многих частных случаях физические константы (функции T, β) при $t = t_0$ — скаляры, а единственный начальный тензор-

константа — единичный δ_{ij} и порождаемые им тензоры 4-го и других порядков

$$\delta_{ij}\delta_{mn}, 2\delta_{ij,mn} = \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}. \quad (11.6)$$

В таких случаях говорят, что среда начально *изотропна*, хотя она и может приобретать анизотропию в процессе деформации. В противном случае ее называют *анизотропной*. Для изотропных сред соотношения (11.5) могут быть существенно упрощены (§ 9).

Мы считаем, что параметры Γ , β есть заданные функции времени и координат. В действительности нередко они сами являются искомыми и даже зависят от $\tilde{\mathcal{E}}$. При этом необходимо еще использовать законы термодинамики и другие законы физики для немеханических параметров (§ 22).

5. Пример теории, в которой используются уравнения для неизвестных функций $\beta(x, t)$, рассматривается в § 22. Здесь и в других разделах параметры $\beta(x, t)$ предполагаются известными функциями x, t . Уравнение, замыкающее систему (11.2), (11.5), — уравнение теплопроводности в виде (10.19) или (10.20)

$$\rho T \frac{\partial \eta}{\partial t} = \rho \left(T \frac{\partial s}{\partial t} - w^* \right) = \operatorname{div} (\tilde{\Lambda} \operatorname{grad} T(x, t)) + \rho q_\beta, \quad (11.7)$$

означающее равенство выделяемого частицей через ее границу количества тепла внешнему оттоку тепла через эту границу. Скалярный функционал энтропии $\eta^t[\tilde{\mathcal{E}}, T, \beta]$, как и тензорный $\tilde{\mathcal{F}}$, для рассматриваемой среды предполагается известным на основании макроскопических опытов (§ 10). Уравнение (11.7) на основании (10.4), (10.17') преобразуется к виду

$$\rho_0 T \frac{\partial}{\partial t} \eta^t[\tilde{\mathcal{E}}, T, \beta] = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(A \Lambda^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + \rho_0 q_\beta. \quad (11.8)$$

Для изотропной среды, имеющей одинаковый для всех направлений коэффициент теплопроводности λ :

$$\Lambda^{ij} = \lambda g^{ij}. \quad (11.9)$$

Здесь λ может быть известной функцией температуры $T(x, t)$ и плотности $\rho(x, t) = \rho_0/A$.

Другая форма записи уравнений, замыкающих систему (11.2), (11.5), следует из (10.48) и предполагает известным функционал внутренней энергии

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} u^t[\tilde{\mathcal{E}}(x, \tau), T(x, \tau), \beta(x, \tau)] = S^{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + W_\beta + \\ + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(A \Lambda^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + \rho q_\beta. \end{aligned} \quad (11.10)$$

В некотором классе необратимых термомеханических процессов ($\beta \equiv 0$), включая и обратимые, система уравнений движения (11.2) замыкается, если известен только один функционал свободной энергии ψ , через который выражаются уравнения состояния (11.5), функционалы энергии, энтропии и рассеяния формулами (10.40), (10.41):

$$\sigma^{ij} \equiv \frac{1}{\rho} S^{ij} = \left(\frac{D\psi^i}{De^{ij}} \right)_t, \quad s = - \left(\frac{D\psi^i}{DT} \right)_t, \quad u = \psi + Ts, \\ \omega^* = -\psi_\omega \geq 0. \quad (11.11)$$

Уравнение (11.10) преобразуется к виду

$$-\rho_0 T \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D\psi}{DT} \right)_t = \frac{\partial}{\partial x^m} \left(A \Lambda^{mn} \frac{\partial T}{\partial x^n} \right) + \rho_0 \omega^*. \quad (11.12)$$

Если в необратимых процессах имеют место соотношения (11.11) и (11.12), то говорят, что существует *обобщенный потенциал* ψ .

По определению система уравнений (11.2), (11.5), (11.8) называется *замкнутой системой уравнений МСС* для внутренних точек области движения среды. В силу основного постулата решение этой системы существует при некоторых начальных условиях и условиях на границе области. Уравнение (11.8) может быть заменено на (11.10). В случае существования обобщенного потенциала ψ система (11.2), (11.11), (11.12) замкнута. При этом функциональной производной ψ по функции $z(x, t)$ называется ядро интегрального представления вариации ψ по z (при $\tau = t$):

$$\psi^t[\dots z + \delta z] - \psi^t[\dots z] \equiv \delta_z \psi(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{D\psi^\tau}{Dz} \right)_\tau \delta \dot{z}(\tau) d\tau, \quad (11.13)$$

т. е. функционал, зависящий от $\psi[\dots z]$, но не от δz ; z — любая из функций e_{ij} , T , β :

$$\left(\frac{D\psi^\tau}{Dz} \right)_t = \left(\frac{D\psi^\tau}{Dz} \right)_{\tau=t}.$$

Таким образом, замкнутая система уравнений МСС в лагранжевых координатах определяет (вместе с начальными и граничными условиями) две искомые функции: вектор-функцию $x \equiv \varphi(x, t)$ и скалярную функцию $T(x, t)$, т. е. закон движения физических частиц и температуру. Все другие функции, представляющие теоретический или практический интерес, являются заданными операторами по (x, t) от $\varphi(x, t)$ и $T(x, t)$, например деформации (11.1), напряжения (11.5), критерии разрушения в твердых телах, условия начала турбулентности, отрыва потоков в жидкостях и газах и т. п., и могут быть найдены.

Функционалы по времени над тензором деформации $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{A}^T \tilde{A}$ являются операторами над аффинором \tilde{A} , например, тензор напряжения $\tilde{S}^i(\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \tau)) = \tilde{S}^i(\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau))$. В уравнения движения входят производные $\tilde{S}(\mathbf{x}, \tau)$ по координатам. Например,

$$\frac{\partial \tilde{S}^i(\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau))}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \tilde{S}^i \left(A(\mathbf{x}, \tau) + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) - \tilde{S}^i(\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau)).$$

Следовательно, в соответствии с (11.13)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tilde{S}^i(\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau)) = \int_{t_0}^t \left(\frac{D\tilde{S}^i}{D\tilde{A}} \right)_\tau \frac{\partial^2 \tilde{A}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x^\alpha \partial \tau} d\tau.$$

Но $\tilde{A} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}$, так что

$$\left(\frac{D\tilde{S}^i}{D\tilde{A}} \right)_\tau \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x^\alpha} = (D\tilde{S}^i / DA_j^i)_\tau \frac{\partial^2 x^j(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x^\alpha \partial x^i},$$

и потому для любого функционала $\tilde{S}^i(\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau))$, имеющего дифференциал Фреше,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tilde{S}^i(\tilde{A}(\mathbf{x}, \tau)) = \int_{t_0}^t (D\tilde{S}^i / DA_j^i)_\tau \frac{\partial^2 x^j(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x^\alpha \partial x^i \partial \tau} d\tau. \quad (11.13')$$

Следовательно, уравнения движения (11.2) являются функциональными по t и дифференциальными линейными относительно вторых (высших) производных по координатам для вектора перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$. Тип уравнений зависит от вида оператора $\tilde{S}^i(\tilde{\mathcal{E}})$. Таково же свойство и уравнения теплопроводности по отношению к энтропии.

В эйлеровом пространстве обычно основными искомыми функциями являются вектор скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ и температура $T(\mathbf{x}, t)$ в пространстве наблюдателя в неподвижных декартовых координатах (x^1, x^2, x^3) или криволинейных координатах q^i (§ 7), т. е. одна вектор-функция и две скалярные. Основными при этом являются следующие уравнения МСС.

1. Уравнения, выражающие тензор скорости деформации $\hat{V} = \text{def } \mathbf{v}$, а также дисторсии скоростей через вектор \mathbf{v} :

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right). \quad (11.14)$$

2. Закон сохранения массы, связывающий плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ с вектором \mathbf{v} :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^i)}{\partial x^i} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d \ln \rho}{dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (11.15)$$

3. Уравнения движения (§ 8) в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = \rho X^i + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j},$$

(11.16)

или

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} - F \right) = \frac{\partial \sigma^i}{\partial x^i},$$

связывающие дивергенцию тензора напряжения \dot{S} с векторами ускорения dv/dt и заданной массовой силы $F = X^i e_i$.

Уравнения (11.14)—(11.16) получаются из (11.1), (11.2) и из условия сохранения массы $\rho A = \rho_0$ простыми преобразованиями от лагранжевой к эйлеровой системе координат, содержащими закон движения $x = \varphi(x, t)$ физической частицы.

4. Уравнения состояния (11.5) в некоторых случаях, включающих классическую теорию жидкостей и газов и теорию некоторых изотропных жидких и твердых тел со сложными свойствами, могут быть преобразованы к виду

$$\tilde{L} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \tilde{S}, \dot{\tilde{S}}; \rho, T, \beta \right) = 0, \quad (11.17')$$

где \tilde{L} — тензор-функция перечисленных в скобках тензоров дисторсии скоростей, напряжения, скорости напряжения $\dot{\tilde{S}}$ типа производных $\dot{Z}^{ij}, \dot{Z}^{ij}, \dots$ (§ 9) и скаляров ρ, T, β в точке x эйлерова пространства в момент t . На основании формул преобразования § 9 такой переход от (11.5) к (11.17') возможен при частном виде функционала $\tilde{\mathcal{F}}$. При достаточно сложных функционалах (11.5) постановка задачи МСС в Э крайне затруднительна.

В декартовых координатах x^i (11.17') означает, что известно шесть функций $L^{ij} = L^{ji}$ от $\partial v^i / \partial x^j$, напряжений σ^{ij} и их полных скоростей $\dot{\sigma}^{ij}$, а также ρ, T, β , причем L^{ij} — декартовы компоненты \tilde{L} :

$$L^{ij} \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^l}, \sigma^{mn}, \dot{\sigma}^{pq}, \rho, T, \beta \right) = 0. \quad (11.17)$$

Если температура T и параметры β известны как функции x, t , то уравнения (11.15)—(11.17) представляют замкнутую систему десяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно вектора v , тензора \dot{S} и плотности ρ , т. е. десяти искоемых функций (v^i, σ^{ij}, ρ) .

5. Уравнение состояния, замыкающее систему, получается при известном функционале внутренней энергии u ; на основании инвариантности формы

$$S^{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \sigma^{ij} v_{ij}$$

в изотропной среде закон сохранения энергии имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) = \sigma^{ij} v_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) + W_\beta + \rho q_\beta. \quad (11.18)$$

Если определены энтропия s и рассеяние w^* , то это уравнение заменяется следующим:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) + \rho w^* + \rho q_\beta. \quad (11.18')$$

В уравнении состояния вида (11.17) предполагается, что энергия и энтропия s — функции ρ , T , β , а рассеяние w^* — функция еще и тензора скорости деформации (11.14):

$$u = u(\rho, T, \beta), \quad s = s(\rho, T, \beta), \quad w^* = f^*(\rho, T, \beta, v_{ij}). \quad (11.19)$$

Процесс деформации просто выражается через производную \tilde{A} вектора перемещения $u(x, t)$ по x и любые операторы по t при $x = \text{const}$ от $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{A}^T \tilde{A}$: все они объективно характеризуют процесс в частице.

В Э основную искомую функцию представляет вектор перемещения $u = x - v(x, t)$ или скорости $v(x, t)$; процесс же характеризуется эволюцией тензора v_{ij} (11.14) и тензора деформации, определяемого (7.24):

$$2E_{ij}(x, t) = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{\partial u^m}{\partial x^i} \frac{\partial u^m}{\partial x^j}. \quad (11.20)$$

Через скорости деформации v_{ij} тензор E_{ij} определяется дифференциальным уравнением (9.34)

$$\overset{0}{E}_{ij}(x, t) \equiv \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{im} \frac{\partial v^m}{\partial x^j} + E_{jm} \frac{\partial v^m}{\partial x^i} = v_{ij}. \quad (11.20')$$

Называя $v_{ij}(x, t)$ объективной производной от E_{ij} по времени, а E_{ij} — интегралом от v_{ij} (§ 9), по уравнению (11.20') в принципе определяется поле тензоров производных и интегралов от тензора скорости деформации (v_{ij}), т. е. объективных операторов в Э, представляющих производные и интегралы от тензора деформаций в Л.

Если среда *идеально изотропна*, т. е. изотропная при $t = t_0$, она остается изотропной при любом $t > t_0$, то операторы (11.4) инвариантны не только относительно преобразований при $t = t_0$ декартовой системы координат $x = x$, но и относительно ортогональных преобразований координат (x^i) в любой момент $t \geq t_0$. По основному постулату МСС в этом случае физический процесс деформации частицы $x = \text{const}$ определяется указанным набором производ-

ных и интегралов от (v_{ij}) и (σ_{ij}) ; определяющие уравнения (11.4) будут представляться, например, в виде

$$\overset{0}{\sigma}_{ij} + \mathcal{M}\sigma_{ij} = \mathcal{N}_{ij}(\overset{0}{E}_{kl}, \overset{0}{v}_{mn}, \overset{0}{v}_{pq}, \dots), \quad (11.21)$$

где аргументы тензор-функции $\tilde{\mathcal{N}}$ суть производные и интегралы от тензора деформации (E_{ij}) или скорости деформации (v_{ij}) в \mathcal{E} , а скаляр \mathcal{M} — функция их инвариантов. Преобразования от (11.5) к (11.21) возможны для идеально изотропных сред.

Если же при $t=t_0$ среда анизотропна или в процессе деформации она приобретает анизотропию, то преобразование (11.4) к виду (11.21) практически невозможно. Обозначая аффинор \tilde{A} в \mathcal{E} через \tilde{b} , $\tilde{b}(\mathbf{x}, t) = \tilde{A}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), t)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{B}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad B_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}, \\ \tilde{b}(\mathbf{x}, t) \tilde{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}}, \quad b_j^i B_k^j = \delta_k^i, \end{aligned} \quad (11.22)$$

найдем тензор деформации $\tilde{\mathcal{E}}$ в компонентах E_{ij} (11.20) и выражения компонент тензора деформаций ε_{ij} как алгебраических функций от $B_m^n(\mathbf{x}, t)$:

$$2E_{ij}(\mathbf{x}, t) = \delta_{ij} - B_i^k B_j^k, \quad \varepsilon_{ij} = E_{mn} b_i^m b_j^n. \quad (11.23)$$

Затем находим выражения компонент S^{ij} тензора \tilde{S} через его компоненты $\sigma^{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ (§ 9):

$$S^{ij} = \sigma^{mn} B_m^i B_n^j, \quad \sigma_{mn} = S^{ij} b_i^m b_j^n. \quad (11.24)$$

Подставляя эти выражения ε_{ij} , S^{ij} в уравнения состояния (11.5), мы как будто бы преобразуем их в эйлерово пространство. Но, как уже выяснено в § 9, эта «подстановка» в общем случае — сложная задача: оператор $\tilde{\mathcal{F}}$, определенный по параметру $t_0 \leq \tau \leq t$ над функциями $\varepsilon_{pq}(\mathbf{x}, \tau)$, должен быть преобразован в оператор над функциями $E_{pq}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ по переменным \mathbf{x}, t . Но он уже не будет инвариантен относительно преобразования системы координат наблюдателя в \mathcal{E} , «объективные» производные и интегралы от E_{ij} , v_{ij} потеряют свое значение, так как в процессе деформации будут возникать новые тензоры «констант» и функционалов анизотропии, отражаемые оператором (11.5).

Выше рассматривались главным образом замкнутые системы уравнений для непрерывного поля векторов перемещения \mathbf{u} , скорости \mathbf{v} и тензоров $\tilde{\mathcal{E}}$ и \tilde{S} . Существенное значение и интерес представляют разрывные поля, характерные для звуковых и удар-

ных волн в жидкостях, сдвигов в земной коре и многих других явлений в природе и технике.

Переход от постановки задачи в эйлеровом пространстве к постановке в лагранжевом значительно проще; поскольку в первой определен вектор $v(x, t)$, то закон движения $x = \varphi(x, t)$ известен как решение уравнения $v(x, t) = \dot{x}$, т. е. $v(\varphi(x, t), t) \equiv \dot{\varphi}(x, t)$. Отсюда находим связь между

$$\tilde{B}(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \text{ и } A(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$$

для физических частиц ($x = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, t) \tilde{B}(x, t) &= \frac{\partial x}{\partial x}; \\ \tilde{A}(x, t) &= \tilde{b}(\varphi, t); \quad g_{ij}(x, t) = A_i^k A_j^k. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Скорости деформации и напряжения преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} v_{ij}(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{mn}}{\partial t} A_i^m A_j^n, \\ \sigma_{ij}(x, t) &= S^{mn} A_m^i A_n^j. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Подставляя полученные выражения в уравнения состояния типа (11.17), получим их представление в лагранжевых координатах.

В заключение приведем замкнутую систему уравнений МСС в эйлеровом пространстве для фиксированного в нем произвольного объема V с поверхностью Σ и произвольного фиксированного интервала времени $t_1 \leq t \leq t_2$. Разность значений функций $z(x, t)$, определенных внутри V и на поверхности, в конечные моменты времени обозначим Δz :

$$\Delta z \equiv z(x, t_2) - z(x, t_1) \equiv z_2 - z_1. \quad (11.27)$$

Такие уравнения полезны как в методах решения задач, так и в случаях, когда внутри или на границе области движения некоторые функции и функционалы разрывны. Уравнения получаются интегрированием по t соответствующих интегральных (по объему) выражений рассмотренных выше законов сохранения массы, импульсов и энергии либо интегрированием по t и по V их дифференциальных выражений. Но в принципе более правильно считать такие *разностно-интегральные уравнения МСС аксиомами*, непосредственно согласованными с основным постулатом, определяющим функционалы, так как, по существу, в них *допускается возможность не непрерывных (по x, t) решений*, т. е. решений замкнутой системы в обобщенных функциях.

Уже отмечалось для любой $z(x, t)$ соотношение

$$\rho \frac{dz}{dt} = \frac{\partial (\rho z)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^i z)}{\partial x^i}, \quad (11.28)$$

следующее из условия сохранения массы; найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \frac{dz}{dt} dV = \int_V \Delta (\rho z) dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho z v n d\Sigma, \quad (11.28')$$

откуда при $z = \text{const}$ получаем закон сохранения массы

$$\int_V \Delta \rho dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho v n d\Sigma. \quad (11.29)$$

Интегрируя по t соотношение (8.20), получаем закон сохранения импульса (уравнения движения)

$$\int_V \Delta (\rho v) dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho v (v n) d\Sigma = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \mathfrak{P}^{(v)} d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho F dV. \quad (11.30)$$

Закон сохранения энергии (10.48) в эйлеровых координатах имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma^{ij} v_{i,j} - \text{div } \mathbf{q} + W_\beta + \rho q_\beta.$$

Интегрируя это уравнение по t и V , учитывая уже известные преобразования

$$\int_V \sigma^{ij} v_{i,j} dV = \int_{\Sigma} \mathfrak{P}^{(v)} v d\Sigma - \int_V \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} v^i dV = \int_{\Sigma} \mathfrak{P}^{(v)} v d\Sigma + \int_V \rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} dV$$

а также (11.28') при $z = v$ и $z = u$, получим закон сохранения энергии в разностно-интегральной форме.

$$\begin{aligned} & \int_V \Delta \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v n d\Sigma = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} (\mathfrak{P}^{(v)} v - \mathbf{q} \mathbf{n}) d\Sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\rho \mathbf{F} \mathbf{v} + W_\beta + \rho q_\alpha) dV. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Второе уравнение (10.48) аналогичным образом приводится к следующей разностно-интегральной форме закона баланса энтропии:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \Delta(\rho s) dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \rho s v n d\Sigma = \\
 & = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{1}{T} (\omega^* + \rho q_\beta) dV. \quad (11.32)
 \end{aligned}$$

Разностно-интегральные уравнения (11.28) — (11.32) называют *законами сохранения* для конечных объемов пространства, и они вместе с законом Фурье $\mathbf{q} = -\hat{\Lambda} \operatorname{grad} T$ также представляют замкнутую систему уравнений МСС, если известны функционалы \mathcal{F} , u , s , $\omega^* \geq 0$ и учитывается соотношение между \mathcal{S} и $\mathcal{P}^{(v)}$ на поверхности Σ : $\sigma^i n^i = \mathcal{P}^{(v)}$.

§ 12. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦАХ ТЕЛ И ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВОВ

Поставить конкретную задачу МСС — значит выбрать соответствующую замкнутую систему уравнений, задать внешние силы и выбрать соответствующие начальные и граничные условия для вектора перемещений u или тензора напряжений S^{ij} , или смешанные (для u и S^{ij}), а также выбрать условия для температуры T , или потока тепла \mathbf{q} , или смешанные (T и \mathbf{q}). Могут быть еще и смешанные термомеханические условия, связывающие между собой u , S^{ij} , T , \mathbf{q} , или еще более общего вида (включающие параметры β).

Массовая сила, определяемая вектором $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ и входящая в уравнение движения, в большинстве случаев известна. Это сила тяжести $|\mathbf{F}| = g$, или всемирного тяготения, в некоторых случаях это известная сила инерции переносного движения, возникающая за счет ускоренного движения системы координат. Но иногда эта сила может быть определена с необходимой точностью только в результате решения некоторой задачи МСС, так как не является известной функцией (\mathbf{x}, t) , а функцией $(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$, как, например, сила тяготения между частицами тела.

На границе тела Σ , которая может быть известной или неизвестной (при любом t), *механические граничные условия могут быть кинематическими, динамическими и смешанными*. В первом случае полностью задан вектор перемещения $u^{(v)}$ или скорости $v^{(v)}$, во втором — вектор поверхностной силы $\mathbf{P}^{(v)}$, в третьем — векторное соотношение между $\mathbf{P}^{(v)}$, $u^{(v)}$ или $\mathbf{P}^{(v)}$, $v^{(v)}$. На частях поверхности Σ : Σ_u , Σ_P , Σ_{up} — могут быть заданы: на Σ_u — вектор $u^{(v)}$ или $v^{(v)}$, на Σ_P — вектор $\mathbf{P}^{(v)}$, на Σ_{up} — векторное соотношение между $u^{(v)}$ или $v^{(v)}$ и $\mathbf{P}^{(v)}$ и их производными по времени и координатам. На всех частях поверхности, следовательно, зада-

ется вектор и условия называются полными; если задается только компонента вектора — неполными.

Перечислим *основные механические граничные условия в задачах МСС* в предположении, что граница области тела Σ задана уравнением $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ в эйлеровом пространстве и единичная нормаль $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ к ней известна:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v} = \frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|} \text{ на } \Phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (12.1)$$

Поверхность $\Phi = 0$ представим состоящей из трех частей: Σ_i , Σ_p , Σ_{vp} .

Кинематические условия на Σ_v в зависимости от свойств среды могут сводиться либо к заданию полного вектора скорости \mathbf{v} (или вектора перемещения \mathbf{u}), например на неподвижной поверхности $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ — *условие полного сцепления* (прилипания):

$$\text{на } \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{v} = 0 \text{ (или } \mathbf{u} = 0), \quad (12.2)$$

либо к заданию только нормальной составляющей вектора скорости или перемещения, например

$$\text{на } \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{v}\mathbf{v} = 0 \text{ (или } \mathbf{v}\mathbf{u} = 0). \quad (12.3)$$

Соотношение (12.3) называется *условием непроницаемости*. Условие непроницаемости на движущейся поверхности $\Phi(\mathbf{x}, t)$ находится так: в момент $t + dt$ частица среды с координатой \mathbf{x} в момент t будет иметь координату $\mathbf{x} + \mathbf{v}dt$; если она была на поверхности, т. е. $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$, то и останется на ней, т. е. $\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{v}dt, t + dt) = 0$, следовательно, после вычитания и деления на dt получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (12.4)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости среды. Но

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \Phi, \quad (12.5)$$

и потому на основании (12.1) получаем

$$\mathbf{v}\mathbf{v} = - \frac{1}{|\text{grad } \Phi|} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \frac{1}{|\text{grad } \Phi|} v_{\Phi}^{(v)}, \quad (12.6)$$

где $v_{\Phi}^{(v)}$ — скорость движения поверхности Φ вдоль ее нормали. Условие (12.4) или (12.6) означает, что нормальная проекция скорости \mathbf{v} среды совпадает с $v_{\Phi}^{(v)}$; это условие совпадает с (12.3), если $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = 0$. Если задано движение каждой фиксированной точки \mathbf{x} поверхности $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$, т. е. задан вектор скорости $\mathbf{v}_{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, то условие сцепления примет вид $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) =$

$=v_\Phi(x, t)$ на $\Phi(x, t)=0$, при этом автоматически выполнено условие (12.6)

$$\text{на } \Phi=0 \quad v=v_\Phi \text{ (или } u=u_\Phi\text{)}. \quad (12.7)$$

Динамические условия на Σ_p в зависимости от свойств среды могут сводиться к заданию либо *нормального напряжения*

$$\begin{aligned} \text{на } \Phi(x, t)=0 \quad P^{(v)} \cdot v &= p_\Phi^{(v)} \\ P^{(v)} \cdot v &\equiv S^{ij} v_i v_j \equiv \sigma_{ij} n_i n_j \end{aligned} \quad (12.8)$$

(пример идеальной жидкости $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$), либо к заданию полного вектора $P_\Phi^{(v)}$ внешней силы (напряжения). Поскольку на любой площадке вектор внутреннего напряжения $P^{(v)} = S^i v_i$, то *условие в напряжениях* имеет вид:

$$\text{на } \Phi=0 \quad P^{(v)} \equiv S^{ij} v_i \partial_j \equiv \sigma^{ij} n_i e_j = P_\Phi^{(v)}. \quad (12.9)$$

Смешанные условия на Σ_{vp} состоят в задании на $\Phi=0$ двух (или одной) составляющих вектора v и одной (или двух) составляющей вектора $P^{(v)}$, а всего трех скалярных условий, т. е. частично — задания условий (12.7), частично — (12.9). Если a, b, c — три ортогональных вектора на поверхности, то три условия должны быть такими, чтобы одно относилось к направлению a , другое — к b , третье — к c , т. е. не было бы двух, относящихся к одному и тому же вектору, иначе задача МСС, как правило, оказывается неопределенной.

Основные температурные граничные условия состоят либо в задании на поверхности температуры:

$$\text{на } \Phi=0 \quad T=T_\Phi(x, t), \quad (12.10)$$

либо в задании теплового потока:

$$\text{на } \Phi=0 \quad qv=q_\Phi(x, t). \quad (12.11)$$

Условие (12.10) возможно потому, что на границе двух однотипных сред, разделенных поверхностью $\Phi=0$, температуры бывают одинаковыми и условие (12.10) означает непрерывность температуры на $\Phi=0$. Условие (12.11), если только на поверхности $\Phi=0$ не образуется тепло, аналогично можно рассматривать как требование непрерывности потока через поверхность, если же тепло образуется (например, за счет трения двух тел на поверхности $\Phi=0$), то правая часть (12.11) будет состоять из теплообразования $q_{\Phi T}$ и потока тепла от внешнего тела. Поток $q_{\Phi T}$ часто считается пропорциональным разности температуры тела T на $\Phi=0$ и температуры внешнего тела T_Φ :

$$q_\Phi = k(T - T_\Phi), \quad (12.12)$$

где k называется *коэффициентом теплоотдачи*. Если твердое тело с границей $\Phi=0$ сильно нагрето, то в пустоту (приблизительно — в воздух) оно отдает *лучистое тепло*; в условии (12.11) в этом случае q_Φ может быть взято согласно закону Стефана—Больцмана:

$$q_\Phi = c \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (12.12')$$

где T — температура тела на поверхности (K), c — постоянная, зависящая от свойств тела. Для *абсолютно черного тела* $c_0 = 5,8 \text{ Вт/м}^2$, для «серых» тел $c = \epsilon c_0$, причем ϵ для разных тел имеет значения от 0,96 для окисленных шероховатых черных металлов до 0,3 для блестяще полированных.

Поскольку уравнения движения среды содержат ускорение, а уравнение теплопроводности — скорость изменения температуры, динамические задачи требуют кроме граничных условий постановки еще и *начальных условий*. В перемещениях $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ эти условия, как и в теоретической механике, имеют вид

$$t = t_0, \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}), \quad (12.13)$$

или

$$t = t_0, \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{x}), \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}),$$

где $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ — заданные векторы (обычно $\boldsymbol{\varphi}_2 = 0$). Начальное условие для температуры

$$t = t_0, \quad T = \chi'(\mathbf{x}) = \chi'(\mathbf{x}), \quad (12.14)$$

где χ — заданные функции координат.

Условия на поверхностях разрывов. Выше рассмотрены условия на поверхности Σ ($\Phi=0$), являющейся границей рассматриваемой области G движения среды. В динамических проблемах МСС необходимо учитывать возможность возникновения *поверхностей разрыва* внутри области G . Такие поверхности могут возникать в средах, обладающих *упругими свойствами* (наряду с другими свойствами, отраженными операторами $\tilde{\mathcal{F}}$, \mathbf{u} , Q_T , ... (§ 12)) за счет прилагаемых в какой-то момент внезапно внешних сил (\mathbf{F} , $\mathcal{P}^{(v)}$) или других воздействий (соответствующих параметрам β). Эти поверхности движутся внутри G , выходя на границу Σ , отражаясь от нее или сообщая ее неподвижным участкам сильные толчки, иногда вызывая разрушения и т. п. Движение поверхности разрыва называют *волной разрыва* в среде. Типичными примерами являются *сейсмические волны* при землетрясениях, *ударные волны* в атмосфере от взрывов и сверхзвуковых движений летательных аппаратов.

Возможность или невозможность возникновения волн в среде полностью определяется типом присущих ей функционалов состояния $\tilde{\mathcal{F}}$ и \tilde{Q}_T (§ 11), которые в уравнениях движения и распространения тепла дифференцируются по координатам и времени. Но именно на поверхностях разрывов они могут терпеть разрывы, и потому дифференциальные уравнения должны пониматься в обобщенном смысле или заменяться интегральными. Это означает: либо решение задачи МСС, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, T , ρ ..., надо искать во всей области G в виде *обобщенных функций*, либо поверхности разрывов выделить из G и включить в состав поверхности Σ , на которой записываются «граничные условия», и тогда искать в получившейся области *классические* решения.

Второй путь в МСС пока является более распространенным, и потому необходимо записать особо уравнения на поверхностях разрывов.

Поверхностью (или волной) сильного разрыва в термомеханических задачах называется движущаяся в среде поверхность, на которой терпят разрыв тензор деформации $\tilde{\mathcal{E}}$, температура T и, следовательно, тензор скорости деформации \tilde{V} и могут иметь разрыв функционалы \mathcal{F}^{ij} уравнений состояния, т. е. тензор напряжения и функционал внутренней энергии $u[\mathcal{E}, T]$, входящей в закон сохранения энергии. В задачах с влиянием электромагнитного поля могут иметь разрыв также параметры β . Поскольку преобразование уравнений при переходе от эйлеровой к лагранжевой системе координат выяснен, рассмотрим вопрос в эйлеровом пространстве. Пусть уравнение поверхности разрыва, ее нормаль и скорость распространения вдоль нормали имеют выражения

$$H(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{v} = \frac{\text{grad } H}{|\text{grad } H|}, \quad v^{(v)} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial t}}{|\text{grad } H|}. \quad (12.15)$$

Индексом «1» отмечаем состояние среды перед фронтом волны, индексом «2» — за фронтом (т. е. уже возмущенное волной состояние). Поверхность $H=0$ предполагается настолько гладкой, что в окрестности точки \mathbf{x} в момент t ее можно заменить касательной плоскостью и рассмотреть малый элемент площади ее поверхности $\Delta\Sigma_H$, одинаковый в момент t и $t+dt$ ($dt=\text{const}$). За время dt в неподвижном слое объема $\Delta V_H = \Delta\Sigma_H \cdot v^{(v)} dt$ пространства наблюдателя произойдут следующие изменения: значения в момент t плотности, скорости, температуры, внутренней энергии, вектора напряжения, параметров β (следовательно, тензоров деформаций, скорости деформаций, напряжений ...)

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad T_1 = T(\mathbf{x}, t), \\ u_1 &= u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{P}_1^{(v)} = \sigma^{ij}(\mathbf{x}, t) n_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_j, \quad n_i = v e_i \end{aligned} \quad (12.16')$$

скачком изменятся и получают значения

$$\rho_2 = \rho(\mathbf{x}, t + dt), \quad \mathbf{v}_2 = \dots, \quad \mathbf{P}_2^{(v)} = \sigma^{ij}(\mathbf{x}, t + dt) n_j(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i. \quad (12.16'')$$

Подчеркнем, что $\mathbf{n} = \mathbf{v}$ и $v^{(v)}$ (12.15) за время dt изменяются пренебрежимо мало.

Скоростью $D(\mathbf{x}, t)$ распространения поверхности разрыва или ударной волны в среде называется *скорость движения поверхности разрыва* вдоль ее нормали относительно невозмущенного волной вещества, т. е. $D = v^{(v)} - \mathbf{v} \mathbf{v}_1$. Изменение скорости среды после прохождения волны обозначим \mathbf{V} ; таким образом,

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad D = v^{(v)} - \mathbf{v}_1 \mathbf{n}. \quad (12.17)$$

Условия непрерывности перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ перед фронтом $H(\mathbf{x}, t) = 0$ и за фронтом (индекс 2) $\Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = 0$ можно рассмотреть еще в момент $t + \delta t$, когда точке \mathbf{x} на $H(\mathbf{x}, t) = 0$ можно сопоставить точку $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v} v^{(v)} \delta t$, которая будет на поверхности $H(\mathbf{x}', t + \delta t) = 0$; скачок перемещения \mathbf{u} будет

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}', t + \delta t) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x}', t + \delta t) = \left(\Delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} v^{(v)} + \Delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \delta t = 0, \quad (12.18')$$

где $\Delta (\partial \mathbf{u} / \partial \dots) = (\partial \mathbf{u} / \partial \dots)_2 - (\partial \mathbf{u} / \partial \dots)_1$. Пусть ξ — бесконечно малый вектор на поверхности $H(\mathbf{x}, t) = 0$ в точке \mathbf{x} :

$$\mathbf{v} \xi = 0, \quad \mathbf{u}_2(\mathbf{x} + \xi, t) - \mathbf{u}_1(\mathbf{x} + \xi, t) = \Delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \xi = 0.$$

Поскольку ξ — любое направление в (\mathbf{x}, t) на $H = 0$, то отсюда следует, что существует диагональная матрица $Z = \text{diag}(z^1, z^2, z^3)$, такая, что

$$\Delta \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{x}} = z^i \mathbf{v}, \quad (12.18'')$$

откуда (умножая на \mathbf{v}) находим

$$z^i = \Delta \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} = \Delta \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{v}}.$$

Из (12.18') теперь имеем

$$z^i v^v + \Delta \frac{\partial u^i}{\partial t} = 0$$

и, внося z^i в формулу (12.18''), получим три векторных равенства

$$v^v \Delta \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{x}} + \Delta \frac{\partial u^i}{\partial t} \mathbf{v} = 0 \quad (12.18''')$$

или девять скалярных кинематических условий на поверхности разрыва $H(x, t) = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial u^i}{\partial x^k} &\equiv \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right)_2 - \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right)_1 = - \frac{v_k}{v^v} \left[\left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)_2 - \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)_1 \right] \equiv \\ &\equiv - \frac{v_k}{v^v} \Delta \frac{\partial u^i}{\partial t} \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Применим к объему ΔV_H законы сохранения (11.28) — (11.31), полагая в них $t_1 = t$, $t_2 = t + dt$. Высота цилиндра, представляющего объем ΔV_H , равна $v^{(v)} dt$ и предполагается бесконечно малой более высокого порядка сравнительно с линейным размером площади основания $\Delta \Sigma_H$:

$$v^{(v)} dt = o(\sqrt{d \Sigma_H}), \quad \Delta V_H = v^{(v)} dt \Delta \Sigma_H,$$

и потому интегралами по боковой поверхности в законах сохранения можно пренебречь. На «верхнем» основании цилиндра, имеющем положительную нормаль \mathbf{v} , все величины имеют индекс «1» и постоянны на всем интервале времени $t_1 \leq t \leq t_2$; на нижнем (с нормалью $-\mathbf{v}$) также постоянны, имеют индекс «2». Из (11.29) находим

$$\Delta \rho \cdot \Delta V_H = \Delta (\rho v) n \Delta \Sigma_H dt, \quad (12.19)$$

или

$$v^{(v)} \Delta \rho = n \Delta (\rho v).$$

В левой части (11.30) первый интеграл равен $\Delta (\rho v) \Delta V_H$, второй равен

$$[\rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}) - \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{n})] dt \Delta \Sigma_H;$$

в правой части $\mathcal{P}^{(-v)} = -\mathcal{F}_2^{(v)}$, $\mathcal{P}^{(v)} = \mathcal{F}_1^{(v)}$, и потому первый интеграл равен $-\Delta \mathcal{P}^{(v)} dt \Delta \Sigma_H$, второй — порядка $\rho F dt \Delta V_H$, т. е. высшего порядка малости. В результате из (11.30) получаем

$$v^{(v)} \Delta (\rho v) - \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{n}) + \rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{n}) = -\Delta \mathcal{P}^{(v)}. \quad (12.20)$$

В (11.31) интеграл, содержащий массовую силу, также отбрасывается, интеграл, содержащий параметр β , обозначим $\Omega_\beta \cdot \Delta \Sigma_H dt$; тогда, аналогично предыдущему, из (11.31) получим

$$v^{(v)} \Delta \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \right] - n \Delta \left[\rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v \right] = -\Delta (\mathcal{P}^{(v)} v) + n \Delta q + \Omega_\beta. \quad (12.21)$$

Если величина $W_\beta + \rho q_\beta$ ограничена внутри объема ΔV_H , то $\Omega_\beta = 0$; если же она терпит разрыв на фронте волны, то может быть конечной и тогда вычисляется по формуле

$$\Omega_\beta = \frac{1}{\Delta \Sigma_H dt} \int_t^{t+dt} dt \int_{\Delta V_H} (W_\beta + \rho q_\beta) dV. \quad (12.22)$$

Уравнения — два скалярных (12.19), (12.21) и одно векторное (12.20) — называются *динамическими условиями на поверхности разрыва*, или на ударном фронте. Они путем алгебраических преобразований на основании (12.17) приводятся к простому виду

$$\begin{aligned} \rho_2 (D - n \Delta v) &= \rho_1 D; & \rho_1 D \Delta v &= -\Delta \mathcal{F}^{(v)}; \\ \rho_1 D \left[\Delta u + \frac{1}{2} (\Delta v)^2 \right] &= -\mathcal{F}_2^{(v)} \Delta v + n \Delta q + \Omega_\beta. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Впрочем, (12.23) получаются из (12.19) — (12.21), если в них заменить

$$v_1 \rightarrow 0, \quad v_2 \rightarrow \Delta v, \quad v^{(v)} \rightarrow D, \quad (12.24)$$

так как физические законы в МСС не зависят от скорости переносного движения v_1 окрестности физической точки.

Как видно из (12.15), (12.17), функция $H(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial H}{\partial t} - v_1 \text{grad } H = D |\text{grad } H|. \quad (12.25)$$

Выбор *допустимых граничных условий* на поверхности Σ , ограничивающей область G_Σ движения среды, как и тип замкнутой системы уравнений, определяется физическими свойствами вещества среды, т. е. видом функционалов состояния $\tilde{\mathcal{F}}$, энергии и и др.

Нормальным для многих сред является *обратимый оператор* $\tilde{\mathcal{F}}$, т. е. имеющий *взаимно однозначный обратный* относительно $\tilde{\mathcal{F}}$ в лагранжевых координатах (§ 9):

$$S^{ij} = \mathcal{F}^{ij}(\epsilon_{mn}, T, \beta), \quad \epsilon_{ij} = \mathcal{F}_{ij}^{-1}(S^{mn}, T, \beta). \quad (12.26)$$

Таковы операторы теории упругости, вязкоупругости, пластичности (упрочняющихся материалов) и др. Нормальными для изотропных упруговязких жидкостей являются уравнения состояния, содержащие две *функции* — скалярную $p(\rho, T, \beta)$ и тензорную $f_{ij}(\nu_{mn}, T, \beta)$, разрешимые однозначно относительно ρ и ν_{mn} (при $\nu_{mn} \neq 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p(\rho, T, \beta) \delta_{ij} + f_{ij}(\nu_{mn}, T, \beta), \\ \nu_{mn} &= f_{mn}^{-1}(\sigma_{ij} + p \delta_{ij}, T, \beta), \quad \rho = \rho(\rho, T, \beta). \end{aligned} \quad (12.27)$$

Первое из представлений (12.27) функционала $\tilde{\mathcal{F}}$ легко переписывается в лагранжевых координатах ($\rho \sqrt{g} = \rho_0$) и дает выражение $\tilde{\mathcal{F}}$. Функционал $\tilde{\mathcal{F}}$ (12.26), вообще говоря, также обратим. В этих нормальных случаях функции \mathcal{F}^{ij} независимы между собой, функции f_{ij} (12.27) также независимы между собой, т. е. допускают обратные \mathcal{F}_{ij}^{-1} , f_{ij}^{-1} .

В особом случае идеальных жидкостей (§ 13) имеют место тождества

$$f_{ij} \equiv 0 \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (12.27')$$

следовательно, обратные операторы f_{ij}^{-1} не существуют:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij}, & \sigma_{ij}\delta_{ij} &= -3p, \\ \mathcal{F}^{(v)} &= \sigma_{ij}v_i e_j = -pv. \end{aligned} \quad (12.28)$$

В особом случае идеально пластических изотропных тел существует соотношение (§ 18)

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = \text{const}, \quad 3\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad (12.29)$$

и потому оператор $\tilde{\mathcal{F}}$ не вполне обратим.

Для всех сред, принимаемых в теории как *объемно-несжимаемые*,

$$\rho = \rho_0, \quad A = \sqrt{g} = 1, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad v_{mn}\delta_{mn} = 0, \quad (12.30)$$

оператор $\tilde{\mathcal{F}}$ не вполне определен, так как вследствие (12.30) не могут быть заданы любые процессы $(\tilde{\mathcal{E}}, T, \beta)$ для физической частицы, а значит, и на поверхности Σ всей области тела. Интегрируя $\text{div } \mathbf{v} = 0$ по объему области V , получим

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \int_\Sigma \mathbf{v} v d\Sigma = 0. \quad (12.31)$$

При этом обычно существует *обусловленный обратный оператор* (согласованный с условием (12.30) и дающий однозначную зависимость $\tilde{\mathcal{E}}$ или \tilde{V} от (\tilde{S}, T, β)) или обусловленный прямой $\tilde{\mathcal{F}}_1$:

$$S^{ij} - \sigma g^{ij} = \mathcal{F}_1^{ij}(\sigma, \tilde{\mathcal{E}}, T, \beta), \quad \mathcal{F}_1^{ij}g_{ij} = 0, \quad g = 1. \quad (12.32)$$

Основной постулат МСС, утверждающий, что внутреннее состояние малой частицы вполне определяется природой среды, заданием закона измерения ее границы или сил на границе и притока энергии $(\delta'A, \delta'Q_T, \delta'A_p)$ через границу во времени относится, конечно, и ко всей области движения среды, если учесть еще работу массовых внешних сил. Это значит, что *решение полной системы уравнений МСС при граничных условиях, правильно от-*

ражающих приток энергии и импульса непосредственно на границе, существует.

Приток энергии дальнего действия (силы тяжести, электромагнитных сил, ...) отражается работой массовой силы \mathbf{F} , входящей в уравнения движения, и функциями параметров β , входящими в законы сохранения.

Движение физической границы Σ_g области в лагранжевых координатах определяется заданием закона движения ее физических точек

$$\mathbf{x} = \varphi_{\Sigma}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\Sigma}(\alpha, \beta), \quad (12.33)$$

причем $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\Sigma}(\alpha, \beta)$ — параметрическое уравнение поверхности, на которой эти точки расположены при $t = t_0$, а $\mathbf{x} = \varphi_{\Sigma}$ — ее параметрическое уравнение в момент t ; или заданием вектора скорости точек $\mathbf{v}_{\Sigma}(\mathbf{x}, t)$ на поверхности $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ эйлерова пространства

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\Sigma}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при } \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (12.34)$$

если эта поверхность известна и является физической границей Σ_g . В этом случае, как уже выяснено, φ_{Σ} (12.33) и есть решение уравнения $d\varphi_{\Sigma}/dt = \mathbf{v}_{\Sigma}(\varphi_{\Sigma}, t)$, и условия (12.33), (12.34) эквивалентны.

Приток тепла определяется заданием на Σ нормальной составляющей вектора потока тепла $q^{\nu} = q_{\Sigma}$ или условием на Σ

$$\mathbf{q} \operatorname{grad} \Phi - q_{\Sigma} |\operatorname{grad} \Phi| = 0, \quad (12.35)$$

которое может быть представлено с помощью как (12.33), так и (12.34). С точки зрения основного постулата условия (12.33) или (12.34) и (12.35) вместе с начальным условием во всей области

$$t = t_0, \quad T = T_0 \quad (12.35')$$

являются естественными для сред с обратимым функционалом $\tilde{\mathcal{F}}$, и решение термомеханических задач существует. Условия (12.34) могут быть заданы и на произвольно движущейся заданной поверхности $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$.

Для обратимых операторов с точки зрения основного постулата задания $\tilde{\mathcal{F}}$ или \tilde{S} эквивалентны, и потому эквивалентны в смысле существования решения задания условий (12.33) или динамических условий

$$S^{ij} v_i \partial_j = \mathcal{P}_{\Sigma}^{(v)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\Sigma}(\alpha, \beta) \quad (12.36)$$

или

$$\sigma_{,j}{}^{\nu} c_j = \mathcal{P}_{\Sigma}^{(n)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } \Phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (12.37)$$

с сохранением условия (12.35). Замена (12.35) условием (12.10) физически также оправдана.

Интересно сопоставление кинематических и динамических условий (12.34), (12.37) и термодинамического (12.35) с условиями на поверхности разрыва (12.23): при постоянной «массе» $\rho_1 D = \text{const}$ в невозмущенной среде ($v_1 = 0$, $\mathcal{P}_1^{(v)} = 0$, $q_1 = 0$, $\Omega_p \equiv 0$) задание скорости Δv тождественно заданию силы $\Delta \mathcal{P}^{(v)}$ и наоборот; вместе с заданием теплового потока $n \Delta q$ любое из этих механических условий однозначно определяет энергию Δu .

Смешанные граничные условия, о которых сказано выше, вследствие эквивалентности кинематических и динамических также им эквивалентны. Естественно, что все эти условия нетождественны, они эквивалентны в смысле возможности существования решения замкнутой системы уравнений МСС.

Особые случаи граничных условий для сред с необратимыми и не вполне обратимыми операторами $\tilde{\mathcal{F}}$ уточняются с учетом их свойств. В несжимаемых средах условия (12.34), (12.36) дополняются ограничениями (12.31) на задаваемые векторы (φ_x, v_x) и дополнительным заданием граничного условия на σ , вытекающим из (12.32):

$$\tilde{\sigma}_{ij} n_i n_j + \sigma = \tilde{\mathcal{F}}^{(n)} \mathbf{n} = N_n \quad \text{на } \Phi = 0. \quad (12.38)$$

При условиях (12.34), (12.31) дополнительно должно быть задано нормальное напряжение N_n в одной точке на поверхности. При условиях (12.37) $\sigma(x, t)$ является новой искомой функцией, и ей соответствует уравнение несжимаемости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{или} \quad g = 1 \quad (12.39)$$

и условие (12.38) на границе, вытекающее из (12.37). В идеальных жидкостях сообщаемая через границу Σ мощность механических сил сводится только к работе нормального давления p на нормальной составляющей вектора скорости. Поэтому условия (12.34) сводятся к заданию одного скаляра v_{xn} :

$$n\mathbf{v} = v_{xn}(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } \Phi = 0, \quad (12.40')$$

а условия (12.37) на основании (12.28) приводятся к виду (12.38), причем $\sigma = -p$ и задан скаляр N_n :

$$p = -N_n \quad \text{на } \Phi = 0. \quad (12.40'')$$

В случае идеально пластической среды кинематические условия (12.33), (12.34) сохраняются и решение замкнутой системы должно существовать в силу основного постулата; по той же причине при условиях (12.37) статическое решение (§ 18) при произвольных нагрузках $\mathcal{P}^{(n)}$ не существует на основании (12.29).

Закончим общими замечаниями о краевой задаче МСС. Каждое из уравнений замкнутой системы и каждое из граничных и начальных условий термомеханической задачи можно рассматри-

вать как равенство нулю компоненты некоторого многомерного вектора — оператора \mathbf{A} над двумя функциями $\mathbf{x}=\varphi(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$ по параметрам \mathbf{x} , t в ограниченной области их изменения

$$\mathbf{x} \in [G(t), \Sigma(t)], \quad t_0 \leq t \leq t' < t_1. \quad (12.40)$$

Для обратимых операторов $\tilde{\mathcal{F}}$ компонентами $\mathbf{A}^1=0$, $\mathbf{A}^2=0$ вектора $\mathbf{A}=0$, относящимися к области параметров (12.40), исключая Σ , являются одно (векторное) уравнение движения и одно уравнение теплопроводности. Компонентами \mathbf{A}^3 , \mathbf{A}^4 из области (12.40), исключая $G(t)$, являются одно граничное условие (векторное) и одно условие притока тепла. Компонентами \mathbf{A}^5 , \mathbf{A}^6 , \mathbf{A}^7 из области изменения параметров (12.40) при $t=t_0=\text{const}$ являются начальные условия для φ и T : при $t=t_0$

$$\mathbf{A}^5 \equiv \varphi - \varphi_0(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\mathbf{A}^6 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \dot{\varphi}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{A}^7 \equiv T - T_0 = 0.$$

Если обозначим $\eta(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7)$ произвольный неортогональный \mathbf{A} вектор с компонентами, определенными в соответствующих областях изменения параметров \mathbf{x} , t , то все семь (15 скалярных) уравнений запишутся в виде

$$\eta(\mathbf{x}, t) \mathbf{A}(\varphi, T) = 0. \quad (12.41)$$

Наиболее просты *линейные* задачи, для которых оператор \mathbf{A} — линейный относительно (φ, T) , так как для таких задач наиболее развиты точные методы решения. В общем случае распространен метод *линеаризации* на основе уравнения (12.41) в *вариациях*: если некоторое решение $\varphi^0(\mathbf{x}, t)$, $T^0(\mathbf{x}, t)$ уравнения (12.41) известно, то разыскивается *ближкое* решение φ^1 , T^1 , удовлетворяющее уравнению

$$\eta \mathbf{L}(\varphi_0, T^0; \delta\varphi, \delta T) = 0, \quad (12.42)$$

причем

$$\mathbf{L} \equiv \delta \mathbf{A} = \mathbf{A}(\varphi^1, T^1) - \mathbf{A}(\varphi^0, T^0) = \mathbf{A}(\varphi^0 + \delta\varphi, T^0 + \delta T) - \mathbf{A}(\varphi^0, T^0).$$

Для уравнений МСС с обратимым $\tilde{\mathcal{F}}$ оператор \mathbf{L} будет линейным относительно $\delta\varphi$, δT . Эту процедуру иногда удается применить многократно и построить последовательность $(\varphi^1, T^1), \dots, (\varphi^n, T^n)$, сходящуюся к решению уравнения (12.41). Формальное доказательство теоремы существования для уравнения (12.41) во многих случаях является сложной задачей. Вопрос о единственности решения в определенной мере связан с решением уравнения в вариациях (12.42). Если заданные функции, входящие в уравнение $\eta \mathbf{A} = 0$ (φ_0 , $\dot{\varphi}_0$, $x_z \dots$), не варьируются, то уравнение в вариациях $\eta \mathbf{L}(\varphi_0, T^0, \delta\varphi, \delta T) = 0$ по определению φ^0 , T^0 имеет нулевое реше-

ние: $\delta\varphi=0$, $\delta T=0$. Но если существует еще и решение, не равное тождественно нулю, то заключают о возможной неединственности и неустойчивости решения φ^0 , T^0 и неустойчивости самого движения среды. Это грубо обоснованное заключение в большинстве случаев оправдывается в опыте. Строгая постановка исследования устойчивости решения уравнений (12.41) принадлежит к числу современных вопросов, не получивших общего решения.

Каждая компонента вектора A вместе с соответствующей компонентой η имеет свою определенную область изменения параметров x , t , например, A^1 , A^2 , η_1 , η_2 имеют область $x \in G$, $t \in (t_0, t_1)$ и т. д. Если интегралом ηA по области его определения назвать сумму интегралов от произведений его компонент A^k на соответствующие компоненты η_k , из которых каждый взят по «объему» соответствующей области определения Ω^k , то уравнение (12.41) можно заменить обобщенным уравнением

$$\int \eta A d\Omega = 0. \quad (12.43)$$

Отсюда следует (12.41) не только при совершенно произвольном η , но и η в виде некоторого оператора по x , t над произвольными вариациями искомых функций. Это приводит к *вариационной постановке задач МСС*.

Глава IV

КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АЭРОГИДРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Простейшие в МСС тела — идеальные и классические (ньютоновские) жидкости, идеально упругие твердые тела. Эти тела (идеализированные модели реальных тел) обладают фундаментальными свойствами реальных жидких и твердых тел, причем свойства, во многих случаях второстепенные, не учитываются. Опыт показывает, что поведение многих реальных жидкостей, газов и твердых тел в определенных условиях достаточно точно описывается уравнениями механики сплошной среды, построенными для указанных идеальных тел. Методическое значение моделей состоит еще и в том, что из сопоставления с опытом получается возможность изучения отклонений свойств реальных тел от свойств моделей и, значит, возможность уточнения теории.

Жидкостями в механике сплошной среды называются тела, сопротивление которых сдвигу при любой деформации стремится к нулю, если скорости деформации равны нулю в течение достаточно большого промежутка времени ($t \rightarrow \infty$).

Твердыми телами в механике сплошной среды называются тела, сопротивление сдвигу которых при постоянных во времени значениях компонент тензора деформации остается отличным от нуля и конечным в течение сколь угодно большого интервала времени ($t \rightarrow \infty$).

Бесконечный интервал времени в опытах не реализуется, и фактически речь идет об интервалах, значительно превосходящих времена релаксации. Для некоторых тел эти времена ничтожны, для других — очень велики.

Напряженное состояние малой частицы любой среды в любой момент t характеризуется тензором напряжений \tilde{S} , который в главных осях напряжений всегда имеет диагональную матрицу

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Экстремальные касательные напряжения, действующие в этой частице в момент t по плоскостям, делящим пополам углы между плоскостями главных напряжений, равны

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

По определению рассматриваемая частица будет частицей жидкости, если при $\tilde{\epsilon} = \text{const}$ и $t \rightarrow \infty$ $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, т. е.

$$t \rightarrow \infty, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p_\infty,$$

или частицей твердого тела, если при $\tilde{\epsilon} = \text{const}$

$$t \rightarrow \infty, |\tau_{\alpha\beta}|_{\max} \geq \tau_\infty > 0,$$

т. е., вообще говоря, при $t \rightarrow \infty$ $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_1$.

Классические теории относятся к термомеханическим процессам.

§ 13. ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

Идеальная жидкость (газ) — это среда, в которой рассеяние отсутствует ($\omega^* = 0$) и сдвиговые сопротивления которой при любой деформации и скорости деформации в любой момент времени равны нулю, т. е. для любого t

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p, \quad (13.1)$$

следовательно, и девиатор напряжений равен нулю. Поскольку главные оси напряжений всегда взаимно ортогональны, то на косяй площадке с нормалью $\mathbf{v}(l_1, l_2, l_3)$ вектор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_v = \mathbf{P}\mathbf{v}$ равен

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3 = -p\mathbf{v}, \quad (13.2)$$

т. е. он направлен по нормали к площадке и имеет величину $-p$. Следовательно, давление p по всем площадкам, в данный момент проходящим через данную точку среды, одинаково. Обычно предполагается, что $p \geq 0$, т. е. это всегда действительно давление. Однако реальные жидкости могут выдерживать и некоторые всесторонние растягивающие напряжения ($p < 0$), и в понятие идеальной жидкости мы не будем включать обязательного требования $p \geq 0$.

В эйлеровых ортогональных декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$) тензор напряжений в идеальной жидкости имеет простейшее выражение

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (13.3)$$

Уравнения движения сплошной среды в рассматриваемых координатах уже найдены в § 8 в виде (8.13):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \rho X_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (13.4)$$

или любой из двух векторных форм, включающих (8.16),

$$\rho \frac{dv}{dt} - \rho F = -\text{grad } p, \quad (13.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - v \times \text{rot } v + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = F.$$

Они называются *динамическими уравнениями Эйлера*. К ним должно быть присоединено уравнение сохранения массы

$$\frac{dp}{dt} + \rho \text{div } v = 0. \quad (13.6)$$

Система (13.5), (13.6) есть система совместных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно вектора скорости v и скаляров p (давления) и ρ (плотности). Это незамкнутая система, так как для пяти функций координат и времени v_1, v_2, v_3, p, ρ она дает только четыре уравнения указанного типа.

Динамические уравнения Эйлера можно записать также в лагранжевых координатах. Пусть, как и ранее, $x = x(x, t)$ — закон движения частицы, причем $x = x_i e_i$ — ее начальный декартов радиус-вектор, а

$$x = \varphi(x, t) = x + u(x, t)$$

— ее текущий радиус-вектор. Поскольку в момент t лагранжева система координат $x_i = \text{const}$ ($i=1, 2, 3$) является, вообще говоря, криволинейной, ковариантные и контравариантные базисы и метрические тензоры определяются законом движения (4.15), (4.23), (4.48)

$$\mathfrak{e}_i = \frac{\partial x}{\partial x_i} = e_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}, \quad g_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}, \dots, \quad (13.17)$$

т. е. $\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}^i, g_{ij}, g^{ij}$ выражаются через частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$.

За искомые функции можно принять либо $x_i(x_1, x_2, x_3, t)$, либо $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, причем g_{ij} и g^{ij} алгебраически выражаются через компоненты тензора деформации.

Найдем выражения контравариантных компонент S^{ij} тензора напряжений \tilde{S} в момент t в базисе \mathfrak{e}_i . По определению идеальной жидкости вектор истинного напряжения на площадке, построенной на векторах \mathfrak{e}_2 и \mathfrak{e}_3 , направлен по нормали к ней (а направление нормали совпадает с \mathfrak{e}^1) и равен давлению p , т. е.

$$P^{(1)} = -p \frac{\mathfrak{e}^1}{|\mathfrak{e}^1|} = -\frac{p \mathfrak{e}^1}{\sqrt{g^{11}}}.$$

Аналогичные выражения получим для $\mathbf{P}^{(2)}$ и $\mathbf{P}^{(3)}$. Вектор напряжения \mathbf{S}^1 равен

$$\mathbf{S}^1 = \mathbf{P}^1 \sqrt{g^{11}} = -p \mathbf{e}^1;$$

аналогично выражаются \mathbf{S}^2 , \mathbf{S}^3 .

Следовательно,

$$\mathbf{S}^i = S^{ik} \mathbf{e}_k = -p \mathbf{e}^i. \quad (13.8)$$

Умножая это равенство на \mathbf{e}^j и учитывая (13.7), получим

$$S^{ij} = -p g^{ij}. \quad (13.9)$$

Соотношения (13.9) представляют просто преобразования соотношений (13.3) от базиса \mathbf{e}_i к базису \mathbf{e}^i . Уравнения движения сплошной среды в лагранжевых координатах, имеющие вид (8.8) или, после умножения его на \mathbf{e}^i ,

$$\nabla_j S^{ij} + \rho (F^i - w^i) = 0,$$

преобразуем, учитывая (13.7), (13.9) и очевидные соотношения

$$\nabla_j (p g^{ij}) = g^{ij} \nabla_j p = g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j},$$

$$F^i = \mathbf{F} \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{F} \mathbf{e}_j = g^{ij} X_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j}, \quad (13.10)$$

$$w^i = \mathbf{w} \mathbf{e}^i = g^{ij} W_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = g^{ij} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \frac{\partial x_k}{\partial x_j},$$

где X_k , W_k — декартовы компоненты (в репере \mathbf{e}_i) векторов массовой силы и ускорения. Имеем

$$-g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g^{ij} \left(X_k - \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0.$$

Отсюда, умножая на g_{im} , получаем лагранжеву форму уравнений движения идеальной жидкости

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} - X_k \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (13.11)$$

Здесь, конечно,

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

Уравнение сохранения массы имеет вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sqrt{g} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| = A. \quad (13.12)$$

Мы снова получили незамкнутую систему четырех дифференциальных уравнений в частных производных для пяти функций координат x_i и времени t : x_1, x_2, x_3 (или u_1, u_2, u_3), ρ, p . Эти уравнения имеют второй порядок по t (относительно x) и первый — по x_i (относительно x, p).

Идеальная несжимаемая жидкость — это идеальная жидкость, плотность каждой малой частицы которой во времени не изменяется. Если при $t=t_0$ плотность ρ_0 была постоянной, то она в несжимаемой жидкости останется постоянной и при $t>t_0$; такая жидкость называется *однородной*. Если при $t=t_0$ $\rho_0=\rho_0(x_1, x_2, x_3)$, то она такой останется и при $t>t_0$, т. е. $\rho=\rho_0(x_1, x_2, x_3)$ *. Уравнения движения в форме Эйлера и условие несжимаемости в эйлеровом пространстве имеют вид (13.5) и

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=0, \quad (13.13)$$

причем *представляют собой замкнутую систему* четырех дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для четырех функций координат и времени: v_1, v_2, v_3, p .

В форме Лагранжа уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости имеют вид (13.11) с *условием несжимаемости*

$$g \equiv |g_{ij}| = 1 \quad \text{или} \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| = A = 1. \quad (13.14)$$

Идеальная баротропная жидкость — это идеальная сжимаемая жидкость (газ), давление p в которой — определенная функция только плотности ρ

$$p=p(\rho), \quad (13.15)$$

причем

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} > 0, \quad \frac{dc}{d\rho} \geq 0. \quad (13.16)$$

Величина $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ называется *скоростью звука*.

В начале курса на примере идеального газа мы уже встречались с уравнением состояния $p=R\rho T$, которое для изотермических процессов совпадает с (13.15), причем $p(\rho)$ есть однородная линейная функция, а для адиабатических — приводится к виду (13.15), причем $p(\rho)$ — степенная функция с показателем $\gamma > 1$, так что в обоих случаях

$$p=p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad \gamma \geq 1. \quad (13.17)$$

* В этом случае жидкость называется *несоднородной*.

Уравнения движения и сохранения массы (13.5), (13.6) (в эйлеровых координатах) или (13.11), (13.12) (в лагранжевых) замыкаются для баротропной жидкости пятым соотношением (13.15).

Введением функции давления при потенциальной силе \mathbf{F} (§ 8)

$$P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{c^2}{\rho} d\rho, \quad \mathbf{F} = -\text{grad } \mathcal{F}_\rho \quad (13.18)$$

из (13.4), (13.5) получаем замкнутую систему для \mathbf{v} , ρ

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F} + \text{grad } P(\rho) = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v} = 0, \quad (13.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(P + \mathcal{F}_\rho + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

Аналогичная система в лагранжевых координатах получается из уравнений (13.11), (13.12), (13.15).

Для слабо сжимаемых жидкостей при небольших давлениях скорость звука c в ряде случаев может считаться постоянной. При этом $P = c^2 \ln \rho$; уравнения сохранения массы и динамические уравнения будут содержать только функции \mathbf{v} и P , причем первое из них имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{dP}{dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Отбрасывая в уравнениях (13.19) квадратичные члены \mathbf{v}^2 , $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$ и $v_i \frac{\partial P}{\partial x^i}$, получим систему

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } P - \mathbf{F} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 0,$$

приводящуюся к волновому уравнению с источником

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \Delta P - \text{div } \mathbf{F}, \quad (13.19')$$

из которого и следует, что $c = \sqrt{dp/d\rho}$ есть скорость распространения слабых возмущений (скорость звука).

Идеальный разреженный или совершенный газ — это идеальная жидкость, подчиняющаяся уравнению состояния Клапейрона

$$p = R\rho T \quad (A\rho = \rho_0), \quad (13.20)$$

причем внутренняя энергия единицы массы прямо пропорциональна температуре

$$u = c_v T = \frac{c_v}{R} \frac{p}{\rho}. \quad (13.21)$$

В начале курса (§ 2) доказано, что такими свойствами обладает одноатомный газ при давлениях, не превышающих сотен атмосфер, причем в системе CGS постоянная $c_v = 3k/2m$ (k — постоянная Больцмана, m — масса атома), $R = k/m$.

Многие инертные газы с достаточным приближением подчиняются уравнениям (13.20), (13.21). Например, для воздуха $R = 2,87 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}^2 \cdot \text{К}$.

Уравнение (13.20) представляет собой соотношение между напряжениями, деформациями и температурой для рассматриваемого тела. Выражение внутренней энергии u (13.21) через два единственных для этой среды независимых параметра состояния ρ и T (u от ρ не зависит) получено в статистической механике и из опыта.

Запишем закон сохранения энергии (§ 10)

$$\rho \delta u = \delta' Q + S^{ij} \delta e_{ij}.$$

Так как

$$v_{ij} \delta_{ij} = v_{ii} = \text{div } \mathbf{v},$$

то из (13.3)

$$S^{ij} \delta e_{ij} = \sigma_{ij} v_{ij} \delta t = -p \text{ div } \mathbf{v} \, dt.$$

Из (13.6)

$$\text{div } \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Учитывая все это, закон сохранения энергии запишем в виде

$$\rho \delta u = \delta' Q + p \frac{\delta \rho}{\rho}, \text{ или } c_v \rho \delta T = \delta' Q + p \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (13.22)$$

Отсюда следует, что c_v — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме ($\rho = \text{const}$). Внося в (13.22) следствие (13.20)

$$\delta \ln \rho = \delta \ln p - \delta \ln T,$$

получим

$$\rho (c_v + R) \delta T = \delta' Q + \delta p, \quad (13.23)$$

т. е. $c_v + R$ есть коэффициент теплоемкости c_p при постоянном давлении ($p = \text{const}$). Таким образом, получилась формула Майера

$$c_p - c_v = R \quad (13.24)$$

Из первого и второго законов термодинамики следует

$$\rho (\delta u - T \delta s) = p \frac{\delta \rho}{\rho},$$

откуда с учетом (13.21) имеем

$$\delta s = \frac{c_v \delta T}{T} - R \frac{\delta p}{p},$$

т. е. определяется энтропия

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const}, \quad (13.25)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — число Пуассона (для воздуха $\gamma = 1,4$).

К известным функциям v , p , ρ , входящим в незамкнутую систему уравнений Эйлера (13.5) и (13.6), добавилась еще одна функция — температура T или энтропия s , связанные с p , ρ соотношениями (13.20) и (13.25). Но теперь закон сохранения энергии дает еще одно дифференциальное уравнение

$$\rho \frac{du}{dt} + \text{div } \mathbf{q} - \rho \frac{d \ln p}{dt} = 0. \quad (13.26)$$

Поток тепла \mathbf{q} для большинства изотропных сред связан с полем температуры T законом Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad } T, \quad (13.27)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, вообще говоря, известным образом зависящий от T . Внося значения u (13.21) и \mathbf{q} (13.27) в (13.26) и используя уравнение сохранения массы (13.6), получим *уравнение теплопроводности*

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} - \text{div} (\lambda \text{grad } T) + p \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (13.28)$$

Теперь система уравнений (13.5), (13.6), (13.20) и (13.28) для вектора \mathbf{v} и скаляров p , ρ , T стала замкнутой для рассматриваемого идеального газа. Вместо T за искомую функцию можно принять u или s , или другую, выражающуюся через p , ρ , T термодинамическую функцию (§ 10), например *энтальпию* (теплосодержание) $i = c_p T$.

Если при значительных скоростях движения газа пренебречь теплопроводностью (считать процесс деформации частицы адиабатическим), то в уравнении баланса энтропии (§ 10), кроме $\omega^* = 0$, надо положить и $\delta' Q = 0$, и значит, энтропия частицы будет постоянной во времени (но может быть различной у разных частиц). Из (13.25) при $s = \text{const}$ получаем

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

т. е. возвращаемся к задаче о баротропной жидкости.

Если энтропия s имеет различные постоянные значения для различных физических частиц, то для таких адиабатических процессов система уравнений Эйлера вместе с условием сохранения массы замыкается соотношением (13.25) и условием

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x^i} = 0. \quad (13.29)$$

На фронте ударной волны из (12.23), (13.21) при $p\Delta q=0$, $\Omega_p=0$ получаем *адиабату Гюгонио* и из (13.25) — условие существования волны $\Delta s = s_2 - s_1 \geq 0$:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2 - \kappa p_1}{p_1 - \kappa p_2} \geq \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\gamma \geq 1, \quad \kappa = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (13.30)$$

Граничное условие в задачах § 13 имеет вид (12.40') или (12.40''), начальные условия — вид (12.13), т. е. задают начальное поле \mathbf{v} (и $\text{rot } \mathbf{v}$).

Если $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ при $t = t_0$, то $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ для любого t (*теорема Лагранжа*) и движение потенциально $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$, и потому из (13.19) получается *интеграл Лагранжа* и уравнение сохранения массы в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 + P(\rho) \quad \mathcal{F}_\rho = c(t), \quad (13.31)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\text{grad } \rho) (\text{grad } \varphi) + \rho \Delta \varphi = 0.$$

Если движение установившееся ($\partial \mathbf{v} / \partial t \equiv 0$), то и при вихревом движении ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$) имеется *интеграл Бернулли* вдоль линии тока (§ 3)

$$P(\rho) + \frac{v^2}{2} + \mathcal{F}_\rho = \text{const}. \quad (13.32)$$

§ 14. ВЯЗКИЕ ЖИДКОСТИ

Классическая вязкая жидкость — это изотропная жидкость (вообще говоря, сжимаемая), сдвиговое сопротивление которой отлично от нуля и линейно зависит от скорости деформации сдвига; термодинамическими параметрами состояния являются плотность ρ и температура T .

Таким образом, в вязкой жидкости тензор напряжений \bar{S} есть линейная функция тензора скорости деформации \bar{V} . Общее соотношение между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\bar{S} = \Pi \bar{\mathcal{E}} + 2\mu \bar{V}, \quad \Pi = -p + \lambda \text{div } \mathbf{v}, \quad (14.1)$$

где Π — скаляр, $\tilde{\mathcal{E}}$ — метрический тензор, μ, λ — коэффициенты вязкости, которые не зависят от деформаций и скоростей. Поэтому их называют «постоянными», хотя они могут зависеть от температуры.

Движение вязкой жидкости обычно рассматривается в эйлеровом пространстве, но позже мы дадим постановку и в Л. В таком случае из (14.1) получаем в декартовых координатах

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} + 2\mu v_{ij}, \quad (14.2)$$

причем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad (14.3)$$

$$\tilde{V} = \operatorname{def} \mathbf{v}; \quad v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Обозначим, как обычно, $3\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}$ и, свертывая (14.2) с δ_{ij} , получим выражение скаляра

$$\Pi = \sigma - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}$$

и связь между σ и p :

$$\sigma = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (14.4)$$

Отсюда следует, что в общем случае среднее напряжение $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij}\delta_{ij}$ есть линейная неоднородная функция скорости деформации объема $\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{ij}\delta_{ij}$

$$\sigma = -p + \lambda' \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \lambda' = \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (14.5)$$

Вводя компоненты девиаторов напряжений и скоростей деформаций

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma \delta_{ij}, \quad (14.6)$$

$$\tilde{v}_{ij} = v_{ij} - 1/3 \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij},$$

из соотношений (14.2) получим

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu \tilde{v}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (14.7)$$

Соотношения (14.2) тождественны соотношениям (14.5), (14.7), но последние имеют более ясный физический смысл, так как (14.5) означает линейный закон вязкости объемного сопротивле-

ния, и потому $\lambda' = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ есть коэффициент объемной вязкости, а (14.7) означает линейный закон вязкости сдвигового сопротивления, и потому μ есть коэффициент сдвиговой вязкости. Действительно, приводя соотношения (14.7) к главным осям ($\tilde{\sigma}_1 = 2\mu \cdot \tilde{v}_1, \dots$) и вычитая их попарно, получим для экстремальных касательных напряжений $\tau_{12} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2), \dots$ и экстремальных скоростей сдвигов $\dot{\gamma}_{12} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2$ соотношения

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \dot{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

На рис. 14.1 пунктиром показано сечение элемента жидкости в момент t , выбранного в виде кубика в главных осях напряжений, совпадающих с главными осями скоростей деформаций согласно (14.7) так, что две грани нормальны к главному направлению «3», а четыре другие делят пополам углы между главными направлениями «1» и «2» (эти направления показаны пунктиром). Через момент dt за счет напряжений τ_{12} произойдут малые

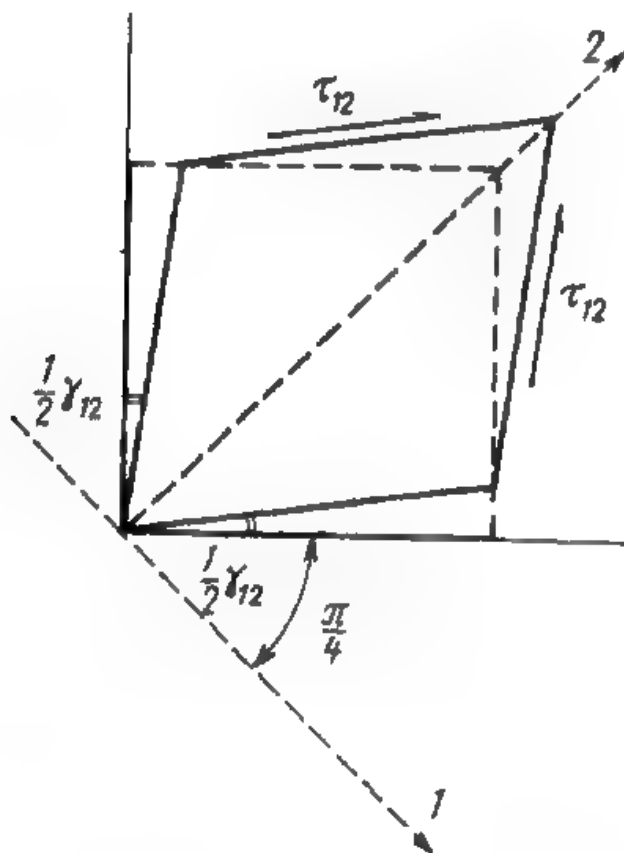


Рис. 14.1

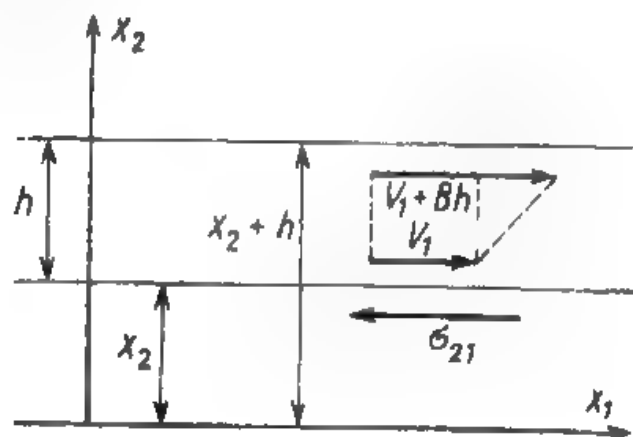


Рис. 14.2

сдвиги $\frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} dt$. Каждое из изображенных касательных напряжений пропорционально полной скорости сдвига:

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} \right) = \mu \dot{\gamma}_{12}.$$

Другое пояснение закона вязкого трения (14.7) получим, если рас-

смотрим плоскопараллельное течение, определяемое полем скоростей

$$v_1 = A + Bx_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

(A, B — постоянные).

На рис. 14.2 показаны две плоскости, расположенные на расстоянии h ; верхняя плоскость, по которой действует касательное напряжение σ_{12} , движется относительно нижней со скоростью $v_1(x_2 + h) - v_1(x_2) = Bh \approx \Delta v_1$. Относительная скорость сдвига плоскостей $\Delta v_1/h = B$ представляет единственную, отличную от нуля компоненту тензора \tilde{V} ($v_{11} = v_{22} = v_{33} = v_{13} = v_{23} = 0, v_{12} = \frac{1}{2} B$). Из (14.7) имеем $\sigma_{12} = \mu B = \mu \Delta v_1/h$, т. е. касательное напряжение пропорционально градиенту скорости v_1 по оси x_2 . Физическую природу вязкого трения в газах и жидкостях можно разобрать на примере рассматриваемого случая. В молекулярном движении каждая молекула имеет отличные от нуля скорости $v_{1\text{ист}}$, $v_{2\text{ист}}$ и за счет этого молекулы, движущиеся со скоростью $v_{2\text{ист}}$ от нижней плоскости к верхней, ускоряются (вдоль оси x_1), а молекулы, движущиеся в обратном направлении, замедляются пропорционально Δv_1 , и, значит, для реализации макроскопического движения слоя h со средними скоростями $v_1 = A + Bx_2, v_2 = 0$ необходимо приложить на плоскостях силы σ_{21} , пропорциональные Δv_1 .

Соотношения (14.5), (14.7) доказываются в кинетической теории газа на основании (1.48'), так как в вязких газах тензор \tilde{S} определяется только кинетическими составляющими $\sigma_{\text{кинет}}^{\alpha\beta}$; для одноатомного газа объемный коэффициент вязкости $\lambda' = 0$, т. е.

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu. \quad (14.8)$$

Для других газов, а также сжимаемых жидкостей соотношение (14.8), вообще говоря, не имеет места.

Уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости в декартовых координатах x_i эйлерова пространства получаются из уравнений движения (8.13)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \left(X_i - \frac{dv_i}{dt} \right) = 0$$

подстановкой σ_{ij} из соотношений (14.2)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{dv_i}{dt} - X_i \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (14.9)$$

Если в области течения λ и μ можно считать постоянными, то отсюда получаются уравнения Навье — Стокса:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} - F \right) = -\text{grad } p + (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } v) + \mu \Delta v, \quad (14.10)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ — оператор Лапласа. Действительно, так как

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Delta v_i, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } v),$$

то (14.9) примет вид

$$\rho \left(\frac{dv_i}{dt} - X_i \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } v) + \mu \Delta v_i \quad (i=1, 2, 3).$$

Уравнение сохранения массы

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \text{div } v = 0$$

вместе с уравнениями Навье — Стокса представляют незамкнутую систему четырех дифференциальных уравнений для пяти функций (v_1, v_2, v_3, ρ, p).

Движение вязкой жидкости сопровождается диссипацией механической энергии. Согласно теореме живых сил работа внешних сил $\delta' A$ за время dt не полностью переходит в кинетическую энергию dK . Для $\delta' A$ имеем согласно (8.27), (8.29)

$$\delta' A = dK + \int_V R dt dV,$$

причем в данном случае работа напряжений в единицу времени будет

$$R = \sigma_{ij} v_{ij} = -p \text{div } v + \lambda (\text{div } v)^2 + 2\mu v_{ij} v_{ij} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + R_{\text{вязк}}, \quad (14.11)$$

где мощность вязких сил $R_{\text{вязк}}$ определяется соотношением

$$R_{\text{вязк}} = \lambda (\text{div } v)^2 + 2\mu v_{ij} v_{ij} = (\lambda + 2/3\mu) (\text{div } v)^2 + 2\mu \tilde{v}_{ij} \tilde{v}_{ij}. \quad (14.12)$$

Предполагается, что $R_{\text{вязк}}$ превращается в тепло, т. е. $w^* = R_{\text{вязк}}$. Согласно второму закону термодинамики

$$\rho T \delta s - \delta' Q = w^* dt \geq 0,$$

и поэтому коэффициенты вязкости $\lambda' = \lambda + 2/3\mu$, μ неотрицательны.

В случае, когда давление зависит только от плотности $p = p(\rho)$, выполняется условие (14.8) и кинематический коэффи-

ент вязкости $\nu = \mu/\rho$ постоянен, из § 8 (8.16) получаем уравнение Навье — Стокса в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } \Phi = \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}, \quad (14.13)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + P(\rho) - \frac{1}{3} \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{v},$$

откуда операцией rot находим уравнение распространения вихря

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \Omega) = \nu \Delta \Omega + \mathcal{J}_\omega, \quad (14.13')$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\Omega, \quad \mathcal{J}_\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{F}.$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье — Стокса и условие несжимаемости (при $\mu = \text{const}$, $\rho = \text{const}$)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{F} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (14.14)$$

представляют замкнутую систему дифференциальных уравнений для \mathbf{v} и p . Работа напряжений в единице объема за единицу времени совпадает с рассеянием ω^* :

$$R = \omega^* = 2\mu v_{ij}v_{ij} = 2\rho\nu v_{ij}v_{ij}. \quad (14.15)$$

Значения коэффициентов ν для некоторых жидкостей и газов приведены в табл. 6.

Таблица 6

Жидкость	Температура, °C	ν , см ² /с
Вода	0	0,0178
	20	0,100
	50	0,0056
Ртуть	0	0,00125
	100	0,00091
Глицерин	20	6,80
Воздух (давление = 10 ⁵ Па)	0	0,133
	20	0,150
	100	0,243

Коэффициент вязкости μ газов почти не зависит от давления, а ν убывает обратно пропорционально давлению. Если вязкость несжимаемой жидкости зависит от температуры ($\rho = \text{const}$, $\mu = \mu(T)$), то уравнения движения имеют вид

$$\frac{dv_i}{dt} - F_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i + 2\nu' v_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \nu' = \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{dT}.$$
(14.16)

Из основных термодинамических равенств

$$\rho du = \delta' Q + w^* \delta t, \quad T \rho \delta s = \delta' Q + w^* \delta t$$

следует $du = T ds$, причем $u = u(T)$, $s = s(T)$. Считая теплоемкость покоящейся жидкости постоянной, т. е. при $v_{ij} = 0$ $\delta' Q = \rho c_v \delta T$, находим

$$u = c_v T + \text{const}, \quad s = c_v \ln T + \text{const},$$

и потому уравнение энергии дает (при законе теплопроводности Фурье и постоянной теплопроводности Λ) уравнение

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \Delta T + \frac{2\nu}{c_v} v_{ij} v_{ij}, \quad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{\rho c_v}}.$$
(14.17)

Система уравнений (14.16), (14.17) для v_1, v_2, v_3, ρ, T замкнута и определяет движение вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости.

В случае вязкого разреженного газа уравнения Навье — Стокса в виде (14.9) и условие неразрывности

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0$$

могут быть дополнены уравнением состояния $p = p(\rho, T)$ и уравнением энергии (при известной $u(\rho, T)$)

$$\rho \frac{du}{dt} = \text{div} (\lambda \text{grad } T) - \rho \text{div } \mathbf{v} + w^*,$$

где w^* имеет вид (14.12). Это уравнение — обобщение уравнений (13.28) и (14.17). Система замкнута для функций v_1, v_2, v_3, ρ, T .

Выведем уравнения движения вязкой жидкости в лагранжевых координатах x_1, x_2, x_3 , принимая за искомые функции $x_i = x_i(x_1, x_2, x_3, t)$ (или $u_i = x_i - x_i$) и имея в деформированном состоянии (в момент t) «вмороженные» криволинейные координаты x_i , базисы и метрические тензоры (§ 4)

$$\partial_i = A_i^k e_k, \quad \partial^j = B_k^j e_k,$$

$$A = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \right|, \quad g_{ij} = A_i^k A_j^k, \quad g^{ij} = B_k^i B_k^j.$$

Умножая (14.2) на $A_m^i A_n^j$, получим

$$S_{mn} = \Pi g_{mn} + 2\mu V_{mn}. \quad (14.18)$$

При этом, как известно, ковариантные компоненты V_{ij} тензора скорости деформации связаны с деформациями e_{ij} соотношениями (§ 7)

$$2V_{ij} = 2 \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_i \partial t} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}. \quad (14.19)$$

Поднимая индексы V_{ij} , получим

$$2V^{ij} = 2V_{mn} g^{im} g^{jn}$$

и, следовательно, найдем выражение закона вязкости в лагранжевых координатах для контравариантных S^{ij}

$$S^{ij} = \Pi g^{ij} + 2\mu g^{im} g^{jn} V_{mn}. \quad (14.20)$$

Контравариантные компоненты ускорения w и массовой силы F в репере ∂_i выражаются через x_i и X_i в ортогональном репере ($F = X_i e_i$) формулами (13.10)

$$w = w^i \partial_i, \quad w^i = g^{ij} \frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}, \quad F^i = g^{ij} X_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j}, \quad F = F^i \partial_i. \quad (14.21)$$

Внося (14.20), (14.21) в уравнения движения

$$\nabla_j S^{ij} + \rho (F^i - w^i) = 0$$

и учитывая свойства g^{ij} , g_{ij} , ∂_i при ковариантном дифференцировании

$$\nabla_j (\Pi g^{ij}) = g^{ij} \nabla_j \Pi = g^{ij} \frac{\partial \Pi}{\partial x_j}, \quad \nabla_j (g^{im} g^{jn} V_{mn}) = g^{im} g^{jn} \nabla_j V_{mn}, \quad (14.21')$$

$$\nabla_j V_{mn} = \frac{\partial V_{mn}}{\partial x_j} - \Gamma_{jm}^k V_{kn} - \Gamma_{jn}^k V_{km},$$

получим уравнение, которое упростим путем умножения на g_{ik} . В результате

$$\rho \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} - X_k \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + 2\mu g^{ik} \nabla_j V_{ik} \quad (i=1, 2, 3). \quad (14.22)$$

Это и есть искомые уравнения, причем скаляр Π имеет вид

$$\Pi = -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} = -p - \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -p + \frac{\lambda}{A} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (14.23)$$

так как ρ через ρ_0 определяется законом сохранения массы

$$\frac{\rho_0}{\rho} = V \bar{g} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| = A. \quad (14.24)$$

Уравнения движения (14.22) можно явно и полностью выразить через давление p и искомый закон движения $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}, t)$. Для этого используем выражения символов Кристоффеля Γ_{jm}^k , вытекающие из (5.1)

$$\Gamma_{jm}^k = \mathfrak{A}^k \frac{\partial \mathfrak{A}_j}{\partial x^m} = B_r^k \frac{\partial A_j^r}{\partial x^m} = B_r^k \frac{\partial A_m^r}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln A}{\partial A_k^r} \frac{\partial A_m^r}{\partial x^j}, \quad (14.25)$$

дифференцируя по t компоненту g_{km} , получим

$$2V_{km} = \frac{\partial g_{km}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A_k^r A_m^r) = A_k^r \frac{\partial^2 x^r}{\partial t \partial x^m} + A_m^r \frac{\partial^2 x^r}{\partial t \partial x^k}.$$

Теперь для краткости обозначим производные по t точкой сверху, по x^k — индексом k после запятой снизу

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}; \quad \frac{\partial x}{\partial x^k} = A_k^i \mathbf{e}_i = x_{i,k} \mathbf{e}_i; \quad \frac{\partial x^m}{\partial x^n} = A_n^m = x_{m,n}. \quad (14.26)$$

Тогда, вычисляя ковариантную производную $2\nabla_j V_{ik}$, из (14.22) получим систему уравнений

$$\ddot{x}_i - X_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial A}{\partial A_n^i} \left[\frac{\partial p}{\partial x^n} - \lambda \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{\dot{A}}{A} \right) \right] = v_0 \kappa_i, \quad (14.27)$$

$$\kappa_i = \varphi^{mk} \dot{x}_{i,mk} + \varphi_{ii}^{mk} \dot{x}_{i,mk} + \dot{x}_{i,k} \frac{\partial \varphi^{mk}}{\partial x^m} + \dot{x}_{i,k} \frac{\partial \varphi_{ii}^{mk}}{\partial x^m},$$

где $v_0 = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость (отнесенная к начальной плотности) и через φ^{mk} и φ_{ii}^{mk} обозначены функции, зависящие только от первых производных \mathbf{x} по координатам (т. е. от A_q^p):

$$\varphi^{mk} = A g^{mk} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial A_m^n} \frac{\partial A}{\partial A_k^n}, \quad (14.28)$$

$$\varphi_{ii}^{mk} = A B_i^m B_i^k = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial A_m^i} \frac{\partial A}{\partial A_k^i}.$$

Отсюда видно, что функции (14.28) являются однородными по A_q^p первой степени и представляют отношения однородных по-

линомов четвертой и третьей степеней, поскольку определитель A имеет выражение

$$A = \partial_{i/jk} A_1^i A_2^j A_3^k;$$

следовательно, производные их по x будут иметь вид

$$\frac{\partial \varphi^{mk}}{\partial x^m} = \psi_j^{ikm} x_{j,im}; \quad \frac{\partial}{\partial x^m} \varphi_{li}^{mk} = \psi_{pli}^{mkq} x_{p,qm}, \quad (14.29)$$

где коэффициенты ψ есть также рациональные функции относительно A_k^q .

Для сжимаемой жидкости система (14.27) замыкается так же, как и в эйлеровом пространстве. В случае баротропной жидкости или газа имеем

$$\frac{p}{\rho_0} = f\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = f(A), \quad (14.30)$$

и система (14.27) становится замкнутой. В случае несжимаемости дополнительное уравнение имеет вид

$$A = 1. \quad (14.30')$$

Умножая обе части уравнения (14.27) на A_r^i/A , получим другой вид:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial x_i}{\partial x_r} (\ddot{x}_i - X_i) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_r} = v_0 x_i \frac{\partial x_i}{\partial x_r} \frac{1}{A}, \quad (14.31)$$

откуда можно исключить Π и получить векторное уравнение распротранения вихря в декартовых переменных $\mathbf{x} = x_r \mathbf{e}_r$:

$$\text{rot} \left[\frac{A_r^i}{A} (\ddot{x}_i - X_i) \mathbf{e}_r \right] = v_0 \text{rot} \left(\frac{A_r^i}{A} x_i \mathbf{e}_r \right). \quad (14.32)$$

Оператор состояния $\tilde{\mathcal{F}}$, имеющий вид (14.18), при условии $\lambda' = \lambda + 2\mu/3 \geq 0$ (14.12), т. е. $\omega^* = R_{\text{вязк}} \geq 0$, является обратимым: умножая (14.18) на g^{mn} и учитывая (14.23), находим

$$\frac{1}{3} S_{mn} g^{mn} \equiv \sigma = -p + \lambda' \text{div } \mathbf{v} = -p - \lambda' \frac{\partial \ln \rho}{\partial t}; \quad (14.32')$$

в баротропном случае $p(\rho)$ имеет обратную функцию, и потому $\rho = \rho_0/A$ определяется через σ , а значит, и Π становится известным функционалом от $\sigma(t)$. Теперь уравнение (14.18) становится линейным:

$$\mu \frac{dg_{mn}}{dt} + g_{mn} \Pi[\sigma] = S_{mn}, \quad (14.33)$$

и решение, т. е. g_{mn} в виде оператора от σ , S_{mn} , находится эффективно. Следовательно, естественные граничные условия (§ 12) для вязких жидкостей — это полные условия кинематического и динамического типа: на границе области течения задан вектор Φ_z или v_z , или $\mathcal{P}_\Sigma^{(v)}$, или $\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}$, или смешанный вектор. В эйлеровых координатах динамические условия имеют вид

$$Pn_j + 2\mu v_{ij}n_i = \mathcal{P}^{(n)}e_j \equiv \mathcal{P}_j^{(n)} \quad \text{на } \Phi=0, \quad [(14.34)]$$

т. е. на поверхности должны быть заданы все три компоненты внешней силы. Например, на свободной поверхности ($\mathcal{P}^{(n)} = -p_0 n$) несжимаемой жидкости три условия имеют вид

$$(p - p_0) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 2\mu v_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (j=1, 2, 3). \quad (14.34')$$

§ 15. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Твердое тело, в котором напряженное состояние в любой точке в любой момент времени t зависит от деформаций в этой точке только в этот же момент времени t (и от температуры или других немеханических параметров), называется *идеально упругим*. Оно называется еще и *изотропным*, если в любой точке все направления равнозначны в отношении упругих свойств, т. е. *упругие свойства характеризуются только скалярными физическими константами*. Тело называется *однородным*, если упругие свойства (при одинаковых значениях параметров μ) одинаковы во всех точках тела.

В классической теории упругости рассеяние ψ^* предполагается равным нулю, свободная энергия предполагается функцией только деформаций и температуры (параметров состояния) и деформации считаются малыми, т. е. вектор перемещения $u(x, t) = x - x$ удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \leq \delta, \quad \delta \ll 1 \quad (i, j=1, 2, 3).$$

В этом случае свободная энергия $\psi(\epsilon_{ij}, T)$ представляется в виде ряда по переменным ϵ_{ij} , T , в котором ограничиваются квадратичными членами. Поскольку ψ — инвариант и тело изотропно, значит, ψ зависит только от инвариантов $\theta = \text{div } u = \epsilon_{ij}\delta_{ij}$ и $\epsilon_{ij}\epsilon_{ij}$. Плотность ρ в уравнениях движения считается постоянной, абсолютная температура — равной $T_0 + \theta$ и не сильно отличающейся от некоторой постоянной T_0 . Итак, имеем с учетом (10.27)

$$\rho_0 \psi = A_0 - S_0 T + B_0 \theta + \frac{1}{2} \left(\lambda \theta^2 + 2\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - 2b \theta \theta - \frac{\rho_0 c \theta^2}{T_0} \right),$$

$$\begin{aligned}\rho_0 s &= -\frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial T} = S_0 + b\theta + \frac{\rho_0 c \vartheta}{T_0}, \\ c_v &= -T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} = c \frac{T_0}{T_0} = c,\end{aligned}\quad (15.1)$$

$$\rho_0 u = A_0 + (B_0 + bT_0)\theta + \frac{1}{2} \left(\lambda \theta^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} + 2\rho_0 c \vartheta + \frac{\rho_0 c \vartheta^2}{T_0} \right),$$

причем A_0, S_0 — несущественные постоянные.

При сделанных предположениях свободная энергия является потенциалом для тензора напряжений, и потому напряжения σ_{ij} определяются соотношениями

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial e_{ij}} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - b \vartheta \delta_{ij} + B_0 \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3). \quad (15.2)$$

Мы получили закон Гука с учетом температуры, причем $B_0=0$, так как предполагается, что при $e_{ij}=\vartheta=0$ также $\sigma_{ij}=0$. Свертывая (15.2) с δ_{ij} , получим закон объемной упругости (термоупругости)

$$\frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \equiv \sigma = K(\theta - 3\alpha \vartheta). \quad (15.3)$$

Отсюда видно, что оператор $S = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\epsilon}, T)$ обратим, если K ограничено; K называется *модулем объемного сжатия*, а α является *коэффициентом линейного расширения*

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad b = 3\alpha K. \quad (15.4)$$

Разрешая (15.2) при $K \neq \infty$ относительно деформаций e_{ij} , получим

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{E} \sigma \delta_{ij} + \alpha \vartheta \delta_{ij}, \quad (15.5)$$

где

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \quad (15.6)$$

E называется *модулем Юнга*, ν — *коэффициентом Пуассона*. Постоянные λ, μ называются *константами Ляме*, причем $\mu = G$ называется также *модулем сдвига*. Между упругими постоянными* (только две из них независимы) имеются соотношения

$$\begin{aligned}\mu = G &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.\end{aligned}\quad (15.7)$$

* Правильнее было бы сказать «константами упругого тела», однако термин «упругие постоянные» широко распространен.

Все модули упругости (λ , μ , E , K) имеют размерность напряжения, ν — величина безразмерная.

Закон Гука (15.5) записывается (при $\vartheta=0$, т. е. при постоянной температуре T_0) обычно в виде $2\mu\epsilon_{ij}=\sigma_{ij}-\lambda\sigma_{kk}\delta_{ij}/(3\lambda+2\mu)$,

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], & 2\epsilon_{12} &= \frac{1}{G} \sigma_{12}, \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})], & 2\epsilon_{23} &= \frac{1}{G} \sigma_{23}, \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], & 2\epsilon_{31} &= \frac{1}{G} \sigma_{31}.\end{aligned}\quad (15.8)$$

Все соотношения (15.1)—(15.8) при малых деформациях справедливы в любых ортогональных криволинейных координатах, так как относятся к малому прямоугольному параллелепипеду.

Внося значения σ_{ij} (15.2) в уравнения движения в декартовых координатах (§ 8)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(X_i - w_i) = 0$$

и учитывая выражения деформаций через перемещение u

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (15.9)$$

получим

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \rho_0 X_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + b \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, 3), \quad (15.10')$$

или в векторной форме, пригодной для любой системы координат:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{F} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + b \text{grad } T. \quad (15.10)$$

В изотропном твердом теле теплопроводность подчиняется закону Фурье (Λ — коэффициент теплопроводности)

$$\mathbf{q} = -\Lambda \text{grad } T \quad \left(q_i = -\Lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (15.11')$$

и поэтому из второго закона термодинамики (при $\eta=s$)

$$\frac{\partial \rho_0 s}{\partial t} = -\frac{1}{T_0} \text{div } \mathbf{q},$$

на основании (15.1) получаем уравнение теплопроводности

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \Delta T - b T_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (15.11)$$

Система уравнений (15.10), (15.11) для вектора u и температуры T совместна и замкнута. Теплообразованием за счет объемной деформации $bT_0 \frac{\partial \theta}{\partial t}$ в (15.11) часто пренебрегают ввиду малости; тогда уравнение (15.11) самостоятельно определяет температуру $T(x, t)$, и в уравнении (15.10) член $b \operatorname{grad} T$ представляет как бы дополнительную известную массовую силу.

При $T = \text{const}$ система (15.10) называется уравнениями движения в форме Ляме.

Значения термоупругих констант некоторых твердых тел даны в табл. 7 (при нормальных условиях).

Таблица 7

Материалы	E , н/см ²	ν	ρ , кг/см ³	ϵ , $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	Λ , $\frac{\text{Дж}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$	α , К^{-1}
Железо	$2,1 \cdot 10^7$	0,28	$7,86 \cdot 10^{-3}$	0,4746	0,6762	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Медь	$1,1 \cdot 10^7$	0,34	$8,93 \cdot 10^{-3}$	0,3906	3,8640	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Алюминий	$0,75 \cdot 10^7$	0,34	$2,7 \cdot 10^{-3}$	0,9117	2,1168	$2,6 \cdot 10^{-5}$

Коэффициент Пуассона ν для металлов близок к 0,3, а вообще заключен в пределах $-1 < \nu < 0,5$. При $\nu < -1$ из (15.7), (15.8) следует, что $G < 0$, т. е. положительным сдвиговым напряжениям (например, $\sigma_{12} > 0$) соответствуют сдвиги в обратном направлении ($\epsilon_{12} < 0$), энергия сдвигов становится отрицательной. При $\nu > 1/2$ имеем $K < 0$ и, значит, такое же положение возникает с объемными деформациями. При $\nu \rightarrow 0,5$ величина $K \rightarrow \infty$, а так как в теле действует конечное напряжение σ , то это возможно лишь при $\theta \rightarrow 3\alpha\vartheta$, т. е. когда материал является механически несжимаемым, а только способен получать тепловое расширение. В этом случае произведение $K(\theta - 3\alpha\vartheta)$ становится неопределенным, и потому функция σ должна быть принята за новую неизвестную.

В случае несжимаемого материала закон Гука записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij} - \alpha \vartheta \delta_{ij}), \quad (15.12')$$

и уравнения движения принимают вид

$$\operatorname{grad} \sigma + \mu \Delta u + \rho F = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mu \alpha \operatorname{grad} T. \quad (15.12)$$

К ним добавляется условие несжимаемости

$$\operatorname{div} u - 3\alpha \vartheta = 0. \quad (15.13)$$

Система (15.11), (15.12), (15.13) становится замкнутой для u , σ , T .

Существование положительно определенной формы — потенциальной энергии

$$\delta' A = \sigma_{ij} de_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} de_{ij},$$

$$W = \frac{K}{2} (\theta - 3\alpha\vartheta)^2 + \mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right)^2 \quad (15.14)$$

обеспечивает существование и единственность решения при полных граничных условиях (12.33) или (12.36), или смешанных.

На основании тождеств $\operatorname{div} \Omega = 0$, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$ и обозначений

$$\theta = \operatorname{div} u, \quad 2\Omega = \operatorname{rot} u \quad (15.15)$$

уравнения движения (15.10) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \theta - \frac{b}{\rho_0} \Delta T + \operatorname{div} F,$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \Omega + \frac{1}{2} \operatorname{rot} F, \quad (15.16)$$

где обозначены постоянные

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}. \quad (15.17)$$

Дивергенция и ротор вектора перемещения u удовлетворяют волновым уравнениям (при заданных ΔT , $\operatorname{rot} F$), поэтому c_1 , c_2 есть скорости распространения объемных (c_1) и сдвиговых (c_2) волн. Существование их доказывается существованием решения уравнений (условий) на предполагаемой поверхности разрыва $H(x, t) = 0$ (12.15). Пусть фронт распространяется в ненапряженном теле ($T = T_0$, $F = \operatorname{const}$), так что $u_1 = 0$, $v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$, $\mathcal{P}_1^{(n)} = 0$, $\rho_1 = \rho_0$. Индексы «2» в кинематических и динамических условиях на $H = 0$ (§ 12) можно отбросить и потому:

$$\Delta u = u_2 = u, \quad \Delta v = v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v^{(n)} = D,$$

$$\Delta \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_2^{(n)} = \mathcal{P}^{(n)}, \quad v = n = n_k e_k.$$

Кинематические условия (12.18) дают связь между скоростями и дисторсиями:

$$n_k \frac{\partial u}{\partial t} = -D \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (15.18')$$

Первые два условия (12.23) дают выражение приращения плотности на фронте $\Delta\rho/\rho_0 = \rho v/D$ и связь между возникающими на нем массовой скоростью $v = du/dt$ и напряжениями, поскольку

$$\mathcal{P}^{(n)} = \sigma^{ij} n_i e_j = \sigma^i n_i,$$

$$D \frac{du}{dt} = - \frac{1}{\rho_0} \sigma_{ij} n_i e_j \equiv - \frac{1}{\rho_0} \sigma^i n_i. \quad (15.18'')$$

Сравнивая du/dt из (15.18') и (15.18''), найдем

$$D^2 \frac{du}{dx_j} = \frac{1}{\rho_0} \sigma^i n_i n_j,$$

откуда

$$2D^2 e_{ij} = \frac{1}{\rho_0} (\sigma_{ik} n_j n_k + \sigma_{jk} n_i n_k). \quad (15.18''')$$

Поскольку с учетом (15.17) закон Гука (15.8) записывается в виде

$$2\rho_0 c_2^2 e_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mm} \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{3c_1^2 - 4c_2^2} \delta_{ij}, \quad (15.8')$$

то (15.18''') представляет однородную систему шести уравнений с шестью неизвестными σ_{ij}

$$\left(\frac{c_2}{D} \right)^2 (\sigma_{ik} n_k n_j + \sigma_{jk} n_k n_i) = \sigma_{ij} - \sigma_{mm} \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{3c_1^2 - 4c_2^2} \delta_{ij}. \quad (15.18)$$

Определитель этой системы равен нулю, и для любой нормали n получаются два решения относительно неизвестного D :

$$D_1 = c_1, \quad D_2 = c_2.$$

Для идеальных жидкостей $c_2 = 0$, и значение $c_1 = \sqrt{\lambda/\rho}$ получается из (15.18''').

Однородное тело называется *анизотропным*, если упругие свойства его различны по различным направлениям, т. е. соотношения между σ_{ij} и e_{ij} (мы по-прежнему рассматриваем малые деформации) определяются тензором упругих «постоянных», компоненты которого изменяются при преобразованиях системы координат. Такими свойствами обладают *кристаллы* и *конструктивно анизотропные тела*. Среди последних, например, стеклопластики (тела, образованные густой сеткой стеклянных нитей, скрепленных различными полимерами (смолами)), многослойные фанеры и др. В случае конструктивной анизотропии предполагается, что малый объем dV содержит достаточное число армирующих элементов, т. е. является представительным.

Свободную энергию при малых изотермических деформациях можно представить в следующем наиболее общем виде, содержащем 81 константу:

$$\rho_0 \psi = \text{const} + \frac{1}{2} E_{ij, mn} e_{ij} e_{mn}. \quad (15.19)$$

Из условия симметрии тензора $e_{ij} = e_{ji}$ следует, что без потери общности в (15.14) можно положить

$$E_{ij, mn} = E_{ij, nm}, \quad E_{ij, mn} = E_{ji, mn}, \quad (15.19')$$

т. е. в (15.19) содержится 36 независимых упругих констант $E_{ij, mn}$. Кроме того, из условия $\partial^2 \psi / \partial e_{ij} \partial e_{mn} = \partial^2 \psi / \partial e_{mn} \partial e_{ij}$ следует еще 15 соотношений

$$E_{ij, mn} = E_{mn, ij}, \quad (15.19'')$$

и, таким образом, всего остается 21 независимая упругая постоянная. Закон Гука в этом наиболее общем случае упругой анизотропии имеет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial e_{ij}} = E_{ij, mn} e_{mn} = E_{ij, 11} e_{11} + E_{ij, 12} e_{12} + E_{ij, 13} e_{13} + E_{ij, 21} e_{21} + \\ + E_{ij, 22} e_{22} + E_{ij, 23} e_{23} + E_{ij, 31} e_{31} + E_{ij, 32} e_{32} + E_{ij, 33} e_{33}, \quad (15.20)_1$$

или разрешенным относительно деформаций:

$$e_{ij} = \mathcal{E}_{ij, kl} \sigma_{kl}, \quad \|\mathcal{E}_{ij, kl}\| = \|E_{mn, kl}\|^{-1}. \quad (15.20)_2$$

Вследствие симметрии e_{ij} и σ_{ij} , т. е. учитывая (15.14), (15.19), из (15.20)₁, конечно, можно получить шесть 6-членных формул, в которые войдет 21 независимая постоянная $E_{ij, mn}$. Проще всего это обнаруживается при введении векторов σ , e . Закон Гука имеет вид

$$\sigma = c e, \quad \sigma_p = c_{pq} e_q, \quad c_{pq} = c_{qp} \quad (p, q = 0, 1, \dots, 5).$$

Число констант для каждого частного типа кристаллов или вообще частного вида анизотропии уменьшается в соответствии с имеющейся симметрией. Из (15.20)₁ следует, что если мы произведем ортогональное преобразование системы координат (x_i) , по отношению к которой написана связь (15.20)₁, то для $E_{ij, mn}$ получим тензорный закон преобразования. Пусть преобразование координат x_i имеет вид $x'_i = l_{ij} x_j$. В новых осях

$$\sigma'_{ij} = E'_{ij, mn} e'_{mn}; \quad (15.21)$$

используя формулы преобразования

$$\sigma'_{ij} = l_{ik} l_{jl} \sigma_{kl}, \quad e'_{ij} = l_{im} l_{jn} e_{mn}, \quad e_{pq} = l_{mp} l_{nq} e'_{mn}$$

и соотношение $\sigma_{kl} = E_{kl, pq} \epsilon_{pq}$, получим

$$E'_{ij, mn} = l_{ik} l_{jl} l_{mp} l_{nq} E_{kl, pq}, \quad (15.22)$$

т. е. $E'_{ij, mn}$ — действительно тензор 4-го порядка.

Симметрия свойств тела означает, что для определенных (т. е. заранее известных для каждого тела) преобразований координат (не обязательно ортогональных) конфигурация повторяется и потому упругие константы не зависят от этих преобразований.

Например, в случае полной изотропии, как мы уже видели, (15.20)₁ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} = (\lambda \delta_{mn} \delta_{ij} + 2\mu \delta_{i/mn}) \epsilon_{mn}, \\ 2\delta_{i/mn} &= \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}; \text{ т. е. } E_{ij, mn} = \lambda \delta_{mn} \delta_{ij} + 2\mu \delta_{i/mn}. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Из (15.22) и (15.23) найдем при произвольном ортогональном преобразовании

$$E'_{ij, mn} = l_{ik} l_{jl} l_{mp} l_{nq} (\lambda \delta_{kl} \delta_{pq} + 2\mu \delta_{klpq}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu \delta_{i/mn} = E_{ij, mn},$$

т. е. упругие постоянные не изменяются. Обратно, если в (15.22) положить $E'_{ij, mn} = E_{ij, mn}$, то мы найдем (из свойств преобразования $l_{im} l_{jn} = \delta_{ij}$), что $E_{ij, mn}$ должны иметь вид

$$b_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + b_2 \delta_{i/mn},$$

т. е. содержат две независимые константы b_1 и b_2 (или λ и μ).

Если свойства сохраняются только при некоторых (не произвольных) преобразованиях координат, то из (15.22) (или аналогичных неортогональных преобразований) находятся соотношения между 21 упругой постоянной.

Анизотропное упругое тело называется *ортотропным*, если существует такая ортогональная система координат x_i , в которой координатные плоскости (точнее, проведенные параллельно координатным в любой точке тела) — плоскости упругой симметрии. Если в этой системе координат изменить направление какой-нибудь оси, например x_1 , на обратное, то упругие постоянные не должны изменяться. При таком преобразовании нормальные деформации ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} и напряжения σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} сохраняют знаки (так как каждый индекс у ϵ_{ij} , σ_{ij} входит дважды), сдвиги ϵ_{12} , ϵ_{13} и касательные напряжения σ_{12} , σ_{13} изменяют знаки на обратные, ϵ_{23} и σ_{23} сохраняют знаки. Аналогичные следствия будут при изменении направлений осей x_2 и x_3 на обратные. Следовательно, в рассматриваемых осях нормальные напряжения могут зависеть только от нормальных деформаций, касательные же — только от соответствующих сдвигов (σ_{12} — от ϵ_{12} и т. д.), т. е. в (15.20)₁ $E_{ij, mn}$ отличны от нуля для $i=j$ только при $m=n$, а для $i \neq j$ — только при $m=i$, $n=j$. Учитывая условие симметрии (15.19'), полу-

координатах $-q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0$. Отсюда в общем случае линейной зависимости потока тепла q от $\text{grad } T$ имеем

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (15.26)$$

причем скорость возрастания энтропии теплообмена

$$\theta^{**} = -q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \geq 0 \quad (15.27)$$

— положительная однородная квадратичная форма относительно $\partial T / \partial x_i$. Без уменьшения общности выражения (15.26) тензор коэффициентов теплопроводности λ_{ij} можно считать симметричным (так как θ^{**} — скаляр, $\partial T / \partial x_i$ — вектор, то по обратному признаку следует, что λ_{ij} — тензор)

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \quad (15.28)$$

Свободную энергию единицы объема анизотропного упругого тела при малых деформациях и малых отклонениях (равных ϑ) от постоянной температуры T_0 можно записать в виде, аналогичном (15.1):

$$\rho_0 \psi = A_0 - S_0 T + \frac{1}{2} \left(E_{ij, mn} e_{ij} e_{mn} - 2\vartheta b_{ij} e_{ij} - \frac{\rho_0 c}{T_0} \vartheta^2 \right), \quad (15.29)$$

откуда аналогично (15.1)

$$\begin{aligned} \rho_0 s &= -\frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial T} = S_0 + b_{ij} e_{ij} + \frac{\rho_0 c}{T_0} \vartheta, \\ c_v &= -T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} = c. \end{aligned} \quad (15.30)$$

Следовательно, связь между σ_{ij} , e_{ij} , T будет такая:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial e_{ij}} = E_{ij, mn} e_{mn} - \vartheta b_{ij}. \quad (15.31)$$

Поскольку $\sigma_{ij} = E_{ij, mn} e_{mn}$ — симметричный тензор, то b_{ij} также симметричен

$$b_{ij} = b_{ji} \quad (15.32)$$

и является тензором коэффициентов температурных напряжений. Разрешая (15.31) относительно деформаций, получим

$$e_{ij} = \mathcal{E}_{ij, mn} (\sigma_{mn} + b_{mn} \vartheta), \quad (15.33)$$

где, как уже отмечено в (15.20)₂, $\mathcal{E}_{ij, mn}$ — тензор, обратный $E_{ij, mn}$. Как видно из этих формул, $\mathcal{E}_{ij, mn} b_{mn}$ — тензор коэффициентов температурной деформации анизотропного тела. Из (15.33)

следует, что ненапряженное анизотропное тело ($\sigma_{ij}=0$) может за счет равномерного нагревания получать не только объемные, но и сдвиговые деформации.

Замкнутая система уравнений динамической термоупругости анизотропного тела получается для u и T из соотношений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho_0 s}{\partial t} = -\frac{1}{T_0} \operatorname{div} q,$$

причем последнее уравнение (теплопроводности) имеет вид

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} - T_0 \beta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}. \quad (15.34)$$

Граничные условия совпадают с условиями изотропного случая.

Применение этих уравнений возможно как к собственно анизотропным телам (кристаллам), так и к конструктивно анизотропным. В последнем случае сетка арматуры должна быть достаточно густой, и все рассматриваемые величины (температура T , поток тепла q , деформации, напряжения) являются средними в некотором смысле. Понятия средних могут быть уточнены на основе опытов с образцами, в которых создаются «однородные» условия, или из теоретических соображений, которые специфичны для конкретных моделей тела. *Конструктивно анизотропные тела называются композитами.*

§ 16. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В нелинейной теории упругости сохраняются все основные предположения линейной теории упругости, за исключением предположения о малости деформаций; последние могут быть произвольными.

Компоненты тензора деформации $\tilde{\varepsilon}(\Lambda)$ в лагранжевых координатах ($x_i = x^i$) выражаются через компоненты метрического тензора $\tilde{\mathcal{G}}(\Lambda)$ соотношениями

$$\tilde{\mathcal{G}} = I + 2\tilde{\varepsilon}, \quad g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}, \quad g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial x^i} \frac{\partial x}{\partial x^j}. \quad (16.1)$$

Следовательно, как уже отмечалось, сам метрический тензор также является тензором деформации, т. е. деформация тела вполне определяется его компонентами. Метрический тензор, как и тензор $\tilde{\varepsilon}$, определяется законом движения частицы $x = x(x, t)$.

Инварианты тензора $\tilde{\mathcal{G}}$ относительно ортогональных преобразований начальной системы координат $x^i = x_i$ определяются как коэффициенты кубического уравнения $|g_{ij} - h\delta_{ij}| = 0$, их обозначим здесь через a, b, c :

$$-h^3 + ah^2 - bh + c = 0, \\ a = g_{ij}\delta^{ij}, \quad b = 1/2(a^2 - g_{ij}g_{ij}), \quad c = g = (\rho_0/\rho)^2. \quad (16.2)$$

Уравнение $|g_{ij} - h\delta_{ij}| = 0$ получается при определении главных деформаций и в обозначениях § 4 получаем $h = g_x$,

$$a = I_{g_1}, \quad b = I_{g_2}, \quad c = I_{g_3}. \quad (16.3)$$

Тело называется упругим, если все входящие в табл. 5 и в основное термодинамическое тождество (10.30) функции являются *параметрами состояния*, причем рассеяние w^* равно нулю, так что функционал энтропии совпадает с энтропией s (10.20), $\eta = s$. Любая пара параметров таблицы (π, r, V) из реакции $r(t)$ в момент t представляет вместе с $V^t = V$ функции параметров процесса $\pi(t)$ в этот же момент. Принимая, например, в качестве процесса (10.24), так что свободная энергия ψ — функция деформации и температуры, получим уравнения состояния упругого тела в лагранжевых координатах (J)

$$\frac{1}{\rho} S^{ij} \equiv \frac{A}{\rho_0} S^{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial e_{ij}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \psi = \psi(e_{ij}, T). \quad (16.4)$$

Соотношения (16.4) можно записать и короче:

$$\frac{A}{\rho_0} \tilde{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{e}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad (16.5)$$

если такие производные действительно суметь эффективно вычислить. Это можно сделать просто для тела *изотропного* и по механическим свойствам, и по температурным, т. е. когда все *термомеханические* свойства тела определяются *скалярными константами* и одним только *единичным тензором* $I = (\delta_{ij})$.

Следовательно, для анизотропного тела соотношения (16.4) имеют вид

$$\psi = \psi(e_{mn}; E_{mnpq}, \alpha_{mn}; T), \quad (16.6)$$

или

$$\psi = \psi(\tilde{e}, \tilde{E}, \tilde{\alpha}, T),$$

где \tilde{E} , $\tilde{\alpha}$ — четырех- и двухиндексные тензоры константы упругости и теплового линейного расширения. Аргументами функции (16.6) будут различные *свертки* указанных в скобках тензоров; фактическое построение таких сверток для кристаллов основывается на свойствах симметрии кристаллической решетки. В конструктивно анизотропных телах они зависят от свойств симметрии неоднородной структуры таких материалов, называемых *композитами*. Наименьшее число алгебраически независимых между собой *сверток* тензорных аргументов функции (16.6) свободной энер-

гии или других скалярных функций состояния V^t , каждая из которых представляет собой инвариант преобразования системы координат, допустимого термоупругой симметрией тела, образуют базис скалярных инвариантов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$, так что (16.6) преобразуется к виду

$$\psi = \psi(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n; T), \quad \mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\tilde{\mathcal{E}}}, \tilde{\alpha}, T). \quad (16.7)$$

Среди этих инвариантов, конечно, инварианты любых ортогональных преобразований (16.3) и другие типа $\alpha_{mn}e_{mn}$, $E_{mnpq}(\alpha_{mp}e_{nq} + \alpha_{np}e_{mq})$, но их не больше шести ($n \leq 6$); остальные зависимы, так как $\tilde{\mathcal{E}}$ — симметричный 6-компонентный тензор.

Из (16.7) находим

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathcal{E}}} d\tilde{\mathcal{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} dT = \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{I}_k} \frac{\partial \mathcal{I}_k}{\partial \tilde{\mathcal{E}}} d\tilde{\mathcal{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} dT,$$

и из основного тождества $\rho(d\psi + \eta dT) = \tilde{S} d\tilde{\mathcal{E}}$ получаем уравнения состояния (сумма по $k=1, 2, \dots, n$):

$$\frac{1}{\rho} \tilde{S} = \psi_{\mathcal{I}_k} \tilde{B}^{(k)}, \quad \tilde{B}^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{I}_k}{\partial \tilde{\mathcal{E}}}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (16.8)$$

Тензоры $\tilde{B}^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n \leq 6$) называются *тензорным базисом* для напряжений рассматриваемого анизотропного тела.

Для изотропного упругого тела, которое будем теперь рассматривать, инварианты могут быть взяты в виде (16.2), свободная энергия (16.6) выражена через $\tilde{\mathcal{G}} = I + 2\tilde{\mathcal{E}}$ и T :

$$\psi = \psi(\tilde{\mathcal{G}}, I, T) = \psi(a, b, c, T). \quad (16.9)$$

Базис, получающийся дифференцированием инвариантов a, b, c (16.2) по g_{ij} или по e_{ij} :

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a}{\partial g_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \tilde{B}^{(1)} = I,$$

$$B_{ij}^{(2)} = \frac{\partial b}{\partial g_{ij}} = a\delta_{ij} - g_{ij}, \quad \tilde{B}^{(2)} = (B_{ij}^{(2)}), \quad (16.10)$$

$$B_{ij}^{(3)} = \frac{\partial c}{\partial g_{ij}} = gg^{ij}, \quad g\tilde{\mathcal{G}}^{-1} = (B_{ij}^{(3)}). \quad (16.11)$$

Тензор напряжения в этом базисе представим в виде

$$\tilde{S} = 2\rho\psi_k \tilde{B}^{(k)}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{g}}, \quad (16.12)$$

$$(\psi_a, \psi_b, \psi_c) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\psi_k), \quad k=1, 2, 3,$$

или через ковариантные компоненты S

$$S_{ij} = 2\rho\psi_k B_{ij}^{(k)}, \quad (16.13)$$

где ψ_a, ψ_b, ψ_c — некоторые скалярные функции, зависящие от инвариантов a, b, c и температуры T , определяемые физическими свойствами твердого тела. Эти три функции считаем заданными на основании опытов:

$$\psi_k(a, b, c, T) \quad (k=1, 2, 3). \quad (16.14)$$

Следовательно, (16.13) полностью определяет связь между тензорами напряжений и деформаций. В действительности для области больших деформаций упругих тел, таких как высокоэластичные полимеры, эти функции изучены еще слабо, и их определение представляет всегда сложную задачу для экспериментатора.

В случае, когда существуют потенциал и свободная энергия ψ (16.9), экспериментально определяемые функции ψ_k (16.14) должны удовлетворять условиям

$$\psi_k = \frac{\partial\psi}{\partial\mathcal{I}_k} \quad (k=1, 2, 3), \quad (16.15)$$

т. е. между ними должны существовать три соотношения, доказывающие существование потенциала:

$$\frac{\partial\psi_a}{\partial b} = \frac{\partial\psi_b}{\partial a}, \quad \frac{\partial\psi_a}{\partial c} = \frac{\partial\psi_c}{\partial a}, \quad \frac{\partial\psi_b}{\partial c} = \frac{\partial\psi_c}{\partial b}. \quad (16.16)$$

Они могут быть проверены в опытах.

Действительное приращение работы внутренних сил в изменяющемся объеме V тела постоянной массы ($dM = \rho dV$) за время dt равно

$$\delta'W = \int_V S^{ij} de_{ij} dV = \int_V \frac{1}{\rho} S^{ij} de_{ij} \rho dV.$$

Оно и при условии (16.15) не будет полным дифференциалом, как и приращение работы в объеме единичной массы

$$\frac{1}{\rho} \tilde{S} d\tilde{\mathcal{E}} = \frac{\partial\psi}{\partial e_{ij}} de_{ij} = \psi_k d\mathcal{I}_k,$$

поскольку полное приращение ψ за dt будет

$$d\psi = \psi_k d\mathcal{I}_k + \frac{\partial\psi}{\partial T} dT = \frac{1}{\rho} \tilde{S} d\tilde{\mathcal{E}} - s dT.$$

Но в случае *изотермического процесса* ($T = \text{const}$) это будут полные дифференциалы

$$\frac{1}{\rho} \tilde{S} d\tilde{\mathcal{E}} = d\psi, \quad \delta'W = dW_T, \quad W_T = \int_V \rho \psi dV + \text{const.} \quad (16.17)$$

Аналогично в случае *адиабатического процесса*; при этом $\delta'Q=0$, и потому $s=\text{const}$, вследствие чего

$$\frac{1}{\rho} \tilde{S} d\tilde{\mathcal{E}} = d(\psi + sT) = du, \quad \delta'W = \delta W_s, \quad W_s = \int_V \rho u dV + \text{const.} \quad (16.18)$$

Работа внутренних напряжений в единице массы и во всем объеме тела будет за время dt полным дифференциалом во всех тех случаях, когда в процессе деформации обеспечивается какое-нибудь соотношение между функциями состояния, приводимое к виду

$$f(s, T) = 0,$$

т. е. дающее определенную связь между энтропией s и температурой T , так как при этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \tilde{S} d\tilde{\mathcal{E}} &= d\psi + s(T) dT = d\left(\psi + \int s dT\right), \\ \delta'W &= dW_f, \quad W_f = \int_V \rho \left(\psi + \int s dT\right) dV + \text{const.} \end{aligned} \quad (16.19)$$

Если существует потенциал напряжений (16.5), то существует и потенциал деформаций. Обозначая (§ 9) *

$$\frac{1}{\rho} \tilde{S} = \tilde{\sigma}, \quad \frac{1}{\rho} S^{ij} = \sigma^{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (16.20)$$

имеем из (10.30) и таблицы (π, r, V) при $\eta=s$

$$\delta\psi + s\delta T = \sigma^{ij} \delta\epsilon_{ij} = \delta(\sigma^{ij} \epsilon_{ij}) - \epsilon_{ij} \delta\sigma^{ij},$$

для *термодинамического потенциала* $\Phi(\pi)$ при $\pi=(T, \tilde{\sigma})$ получим уравнение

$$\delta\Phi + s\delta T + \tilde{\mathcal{E}} \delta\tilde{\sigma} = 0, \quad (16.21)$$

откуда

$$\tilde{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\sigma}}, \quad s = -\frac{\partial\Phi}{\partial T}. \quad (16.22)$$

Коэффициент теплоемкости c_v при постоянных деформациях ($\delta\epsilon_{ij}=0$) определяется из условия $\delta'Q = \rho c_v \delta T = \rho du(T, \tilde{\mathcal{E}})$. Следовательно, теплоемкость

* Отличие от компонент $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ в Э мы при необходимости отмечаем аргументами (\mathbf{x}, t) .

$$c_v = \frac{\partial u(T, \tilde{\mathcal{E}})}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \psi(T, \tilde{\mathcal{E}})}{\partial T^2}. \quad (16.23)$$

Аналогично можно получить $c_p = \partial u(T, \tilde{\sigma}) / \partial T$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \phi(\tilde{S}, T)}{\partial T^2} < 0. \quad (16.24)$$

Уравнения движения изотропного упругого тела в перемещениях получаются подстановкой закона упругости (16.13) при заданной функции $\psi(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ в уравнения (8.11). Система (8.11) при заданной $\psi(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ и заданном поле температуры $T(x, t)$ замкнута относительно перемещения u или вектора $x = x + u$.

Если поле температуры неизвестно, то используется закон теплопроводности, определяющий поток тепла q через градиенты температуры, и уравнение баланса энтропии

$$q^i = -\Lambda^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j}, \quad \rho T \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\Lambda^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j} \right), \quad (16.25)$$

причем в изотропном случае $\Lambda^{ij} = \lambda g^{ij}$.

Граничные условия для основных задач в перемещениях или напряжениях имеют вид (§ 12)

$$x = x_\Sigma \text{ или } S^i v_i = \mathcal{P}_\Sigma^{(v)} \text{ при } \Phi = 0,$$

а для поля температуры

$$T = T_\Sigma \text{ или } q^i v_i = q_\Sigma \text{ при } \Phi = 0.$$

Если функция ψ вида (16.9) представима полиномом по $\tilde{\mathcal{E}}$, то напряжение не только представимо трехчленной формулой (16.12), но с помощью интерполяционного полинома Лагранжа (9.14) упругий потенциал представим явно через корни характеристического уравнения, определяющего главные значения g_i метрического тензора $\tilde{\mathcal{E}} = I + 2\tilde{\mathcal{E}}$ (4.55), которые выражаются через главные кратности деформаций (§ 4)

$$\lambda_i = \sqrt{g_i} \quad (i=1, 2, 3). \quad (16.26)$$

Эти три инварианты взаимно однозначно связаны с инвариантами (a, b, c) и потому сами для изотропных тел принимаются в качестве аргументов потенциала ψ :

$$\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, T). \quad (16.27)$$

Они удобны также в экспериментальных исследованиях. Истинное главное напряжение $\sigma_i^{\text{ист}}$, соответствующее деформации λ_i ,

согласно термодинамическому тождеству $\rho(d\psi + sdT) = \tilde{S}d\tilde{\mathcal{E}}$, в котором

$$\tilde{S}d\tilde{\mathcal{E}} = \sigma_i^{\text{нст}} d\lambda_i, \quad (16.28)$$

непосредственно находящееся через ψ

$$\sigma_i^{\text{нст}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} = \frac{\rho_0}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i}, \quad (16.29)$$

и измерения $\sigma_i^{\text{нст}}$ и кратностей λ_i позволяют строить ψ по опытным данным, а также проверять потенциальность напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sigma_n^{\text{нст}}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_n} (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sigma_m^{\text{нст}}). \quad (16.29')$$

Задача построения $\psi(\lambda, T)$ на основании (9.14) упрощается, так как нужно построить функцию $\mathcal{F}(\lambda_\alpha, T)$ только одного аргумента, после чего для тензора напряжений получится выражение

$$\tilde{S} = F(\tilde{\mathcal{E}}, T) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mathcal{F}(\lambda_\alpha, T) \frac{(\tilde{\mathcal{E}} - \lambda_\beta^2 I) (\tilde{\mathcal{E}} - \lambda_\gamma^2 I)}{(\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2) (\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2)}. \quad (16.30)$$

Однако экспериментальные исследования по конечным деформациям твердых тел очень сложны: за длительное время установлено немного потенциалов, главным образом для эластомеров, к которым в первую очередь относятся синтетические и натуральные каучуки (резины). Укажем несколько потенциалов, приведенных в [53]:

$$(1940): \quad \Phi_1 = \frac{1}{4} \mu [(1+b)(I_{g_1} - 3) + (1-b)(I_{g^{-1}} - 3)], \quad (16.31')$$

где $I_{g_1} = g_1 + g_2 + g_3$ совпадает с a (16.3) в главных осях, $I_{g^{-1}}$ то же с заменой g_i на g_i^{-1} ($g_i = \lambda_i^2$);

$$(1977): \quad \Phi_2 = \mu \left[(1+b) \sum_{k=1}^3 (\lambda_k - 1) + (1-b) \sum_{k=1}^3 (\lambda_k^{-1} - 1) \right]; \quad (16.31'')$$

$$(1976): \quad \Phi_3 = A^\nu \left[\frac{2\mu}{n^2} \sum_{k=1}^3 (\lambda_k^n - 1) + \frac{B}{n^m} \sum_{k=1}^3 (\lambda_k^n - 1)^m \right] + \Phi(A), \quad (16.31''')$$

причем $A = \sqrt{g} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Сжимаемостью эластомеров часто пренебрегают, полагая $A - 1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1 = 0$. При вычислении напряжений на основе потенциалов Φ (16.31) рассматривают функцию $\Phi' = \Phi - p \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, причем в главных осях

$$\sigma_\alpha = \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi'}{\partial \lambda_\alpha} = \lambda_\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_\alpha} - p \lambda_\beta \lambda_\gamma \right) = \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_\alpha} - p; \quad (16.32)$$

множитель Лагранжа p остается неопределенной функцией (x, t) . Изотермическую сжимаемость учитывают, например, соотношением

$$p = \frac{K_0}{n} (A^{-n} - 1), \quad -3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = S^{ij} g_{ij}. \quad (16.33')$$

В общем случае соотношение Ми — Грюнайзена отражает свойства многих тел, включая металлы:

$$P(A, T) - P_n(A) = \frac{p_0}{A} \Gamma(A) [u(A, T) - u_n(A)], \quad (16.33)$$

$$\rho_0/\rho = A, \quad \Gamma(A) = \Gamma_0 - a_1(1 - A).$$

Здесь u — внутренняя энергия, $P_n(A)$, $u_n(A)$ — функции, определяемые на фронтах ударных волн; при больших давлениях p формула (16.33) сохраняет достаточную точность.

Отметим, что при больших давлениях p (16.33') отношение максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = |\sigma_\alpha - \sigma_\gamma|/2$ к давлению становится малым:

$$\left(\frac{\tau_{\max}(p)}{p} \right)_{p \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (16.34)$$

При больших давлениях термомеханические свойства твердых тел приближаются к свойствам идеальных жидкостей, как, впрочем, и свойства жидкостей вязких.

Заметим, что главные значения симметричного тензора \tilde{Z} , заданного в декартовых координатах компонентами \tilde{z}_{ij} , в главных осях имеют компоненты z_k ($k=1, 2, 3$), выражающиеся через инварианты

$$3z = z_{ij} \delta_{ij}, \quad \tilde{z} = \sqrt{\tilde{z}_{ij} \tilde{z}_{ij}}, \quad |\tilde{z}_{ij}| = \det \tilde{z}_{ij}$$

с помощью угла вида напряженного состояния

$$\cos \varphi = (\det \tilde{z}_{ij}) / \tilde{z}^3 \sqrt{6} \quad (16.35)$$

формулами

$$z_k - z = \sqrt{2/3} \tilde{z} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + m_k \frac{\pi}{3} \right);$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 4. \quad (16.36)$$

Поэтому интерполяционный полином Лагранжа представляет собой эффективное квадратичное представление произвольной функции тензора $\mathcal{F}(\tilde{Z})$, удобное для экспериментального определения вида функций $\mathcal{F}(\dots)$ по простейшим опытам.

Глава V

СРЕДЫ СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Механические свойства жидкостей и твердых тел, не обладающих совершенной упругостью и вязкостью, настолько переплетаются, что для тех и других нередко используются одни и те же соотношения между напряжениями и деформациями, и в этих случаях основные дифференциальные уравнения МСС для них совпадают. Важный пример таких сред представляют полимерные материалы (смолы, каучук, ...). Технология их производства охватывает область жидкого и твердого состояния, причем упругие и вязкие свойства являются существенными. Поведение металлов в технологических процессах и конструкциях в зависимости от диапазона температур определяется вязкими, вязкопластическими, упругопластическими или упругими свойствами.

Установление связей между напряжениями и деформациями и замыкание системы уравнений производятся методами, изложенными в гл. II. В ряде случаев поле температуры T предполагается известным, и потому уравнения МСС становятся замкнутыми только на основании определяющих соотношений.

§ 17. ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СРЕД СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В этом параграфе рассмотрим формально близкие между собой модели сред со сложными свойствами; *конечные деформации* будем рассматривать только в *ортогональных эйлеровых координатах* x_i , *малые же деформации* — в *начально ортогональных лагранжевых координатах* (x_i). Компоненты тензора напряжений по-прежнему в Э и Л будем обозначать σ_{ij} , S^{ij} , S_{ij} , скорости деформации — v_{ij} , $V_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$, деформации — E_{ij} , e_{ij} , девиаторы отмечать волной сверху

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = 1/3 \sigma_i \delta_{ij} = \frac{1}{3} S^{ij} g_{ij},$$

$$\tilde{v}_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Существенную роль будут играть также вторые инварианты девиа-

торов $\tilde{\sigma}_{ij}$, \tilde{v}_{ij} , причем квадратные корни из этих инвариантов будем называть *модулями девиаторов* и обозначать

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma} &= \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_u = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}, \\ \tilde{v} &= \sqrt{\tilde{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(v_{11}-v_{22})^2 + \dots + 6(v_{12}^2 + \dots)}.\end{aligned}$$

В излагаемых ниже теориях разработаны эффективные методы решения задач и вариационные принципы (§ 12).

1. **Нелинейно-вязкие стабильные жидкости** в простейшем случае отличаются от рассмотренной ранее (§ 14) классической жидкости тем, что коэффициенты вязкости зависят от тензора скорости деформации и температуры. Для изотропной нелинейной вязкой *несжимаемой* жидкости, как и для классической, девиаторы напряжений и скорости деформаций пропорциональны:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu\tilde{v}_{ij} = 2\mu v_{ij}. \quad (17.1)$$

Возводя левые и правые части первого равенства в квадрат, получим

$$2\mu = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{v}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{v_u}. \quad (17.1')$$

и, следовательно,

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + \frac{2\sigma_u}{3v_u} v_{ij}, \text{ так как } v_{kk} = 0. \quad (17.2)$$

В классическом случае ньютоновской несжимаемой жидкости коэффициент μ при $T = \text{const}$ постоянен. В рассматриваемом здесь случае коэффициент вязкости μ есть некоторая функция инвариантов \tilde{v} и σ , однако такая, что $\sigma \rightarrow 0$ при $\tilde{v} \rightarrow 0$:

$$\tilde{\sigma} = \Phi(\tilde{v}, \sigma, T), \quad \tilde{v}\mu(\tilde{v}) \rightarrow 0 \text{ при } \tilde{v} \rightarrow 0. \quad (17.3)$$

Эта функция находится из опытов на сдвиг и обычно не зависит от σ , а только от \tilde{v} и T . Среднее напряжение σ , как и в других несжимаемых средах, находится в процессе решения краевой задачи.

Соотношение (17.1), справедливое как для классической, так и нелинейно-вязкой жидкости, можно трактовать как *условие совпадения направлений* тензоров $\tilde{\sigma}_{ij}$ и \tilde{v}_{ij} , и потому оно называется *векторным свойством среды*.

Подобно тому как направление вектора \mathbf{a} определяется единичным вектором $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, также говорят о направлении тензора T_{ij} , характеризуя его так называемым направляющим тензором $\tilde{T}_{ij}/\sqrt{\tilde{T}_{mn}\tilde{T}_{mn}}$.

Соотношения между инвариантами называются *скалярными свойствами* среды; таково (17.3). Таким образом, векторные свойства классической и рассматриваемой здесь вязкой жидкости совпадают, скалярные свойства их различны.

Работа внутренних напряжений в единицу времени в единице объема при условии (17.1) равна сумме работ девиатора $\tilde{\sigma}_{ij}$ и среднего напряжения σ :

$$\begin{aligned} R = \sigma_{ij}v_{ij} &= (\tilde{\sigma}_{ij} + \sigma\delta_{ij}) \left(\tilde{v}_{ij} + \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} \right) = \\ &= \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_{ij} + \sigma \operatorname{div} \mathbf{v} = \tilde{\sigma}\tilde{v} + \sigma \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned}$$

так как $\tilde{v}_{ij}\delta_{ij} = 0$ и $\tilde{\sigma}_{ij}\delta_{ij} = 0$. Следовательно, мощность, развиваемая внутренними силами в единице объема, в случае несжимаемых жидкостей, т. е. при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (17.4)$$

равна произведению модулей $\tilde{\sigma}$ и \tilde{v} :

$$R = \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_{ij} = \tilde{\sigma}\tilde{v} = \sigma_u v_u = 2\mu\tilde{v}^2 = 3\mu v_u^2. \quad (17.5)$$

Эта мощность полностью рассеивается в тепло, т. е. $\omega^* = R$. Единственным независимым параметром состояния рассматриваемых стабильных жидкостей считается температура T , и потому из законов сохранения

$$\rho du = \delta' Q + R dt,$$

$$\rho T ds = \delta' Q + R dt, \quad \rho = \text{const},$$

по заданной теплоемкости c , которая зависит от T , находим

$$ds = \frac{du}{T}, \quad u = \int c(T) dT + \text{const},$$

Закон сохранения энергии приводит к уравнению теплопроводности

$$\rho c \frac{dT}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + 2\mu\tilde{v}^2, \quad (17.6)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T.$$

Уравнения движения $\sigma_{ij,j} + \rho(X_i - w_i) = 0$, при подстановке в них выражений напряжений (17.2), условие несжимаемости (17.4)

и уравнение (17.6) образуют замкнутую систему для v , σ , T , если известна зависимость от T коэффициента теплопроводности. Граничные условия либо совпадают с условиями классической теории — условием полного сцепления (12.2), либо заменяются *условием проскальзывания*. Например, асфальт может скользить по твердому основанию, особенно при повышенных температурах. В этом случае условие непроницаемости основания (12.3) должно быть дополнено двумя скалярными условиями из (12.9): вектор касательного напряжения $\mathbf{P}^{(n)} - N^{(n)}\mathbf{n}$ по свойствам среды должен быть направлен против вектора относительной скорости

$$\mathbf{P}^{(n)} - N^{(n)}\mathbf{n} \equiv S_\Phi \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

где S_Φ — известная из опытов функция температуры T , нормального напряжения $\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j$, скорости скольжения $|\mathbf{v}|$.

2. Идеальная изотропная жесткопластическая среда Сен-Венана — идеализованное несжимаемое твердое тело, обладающее следующими свойствами:

1) компоненты девиатора напряжений ограничены по модулю, причем если

$$\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \tilde{\sigma}^2 \equiv \frac{2}{3}\sigma_u^2 < \tilde{\sigma}_s^2 \equiv \frac{2}{3}\sigma_s^2, \quad (17.7)$$

то тело остается жестким (скорости деформации равны нулю), напряжения неопределенны;

2) если в какой-либо области тела $\tilde{v} > 0$, то выполняется *условие пластичности*, т. е.

$$\frac{3}{2}\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \sigma_u^2 = \sigma_s^2, \quad (17.8)$$

где σ_s — константа материала, называемая пределом текучести (при данной температуре), т. е. $\sigma_s = \sigma_s(T)$;

3) при пластическом течении векторные свойства тела совпадают с векторными свойствами вязкой жидкости, т. е. определяются соотношением (17.2).

Опыты над многочисленными квазиизотропными материалами, например металлами, показывают, что чисто упругое их состояние, определяемое рассмотренными ранее свойствами и соотношениями (§ 15, 16)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \dots, \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{G} \sigma_{12}, \dots$$

существует лишь при малых деформациях до тех пор, пока интенсивность напряжений $\sigma_u < \sigma_s$; условие начала пластических дефор-

маций $\sigma_u = \sigma_s$ называется *условием пластичности Мизеса*. Ранее Кулон и Сен-Венан принимали аналогичное условие в виде

$$\tau_{\max} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad (17.9)$$

где τ_{\max} — наибольшее по модулю из главных касательных напряжений (§ 6),

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

Соотношение (17.9) называется *условием пластичности Кулона — Сен-Венана*, τ_s — *пределом текучести при сдвиге*. Равенство $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3}$ получается из (17.8), если рассмотреть случай чистого сдвига ($\sigma_2 = -\sigma_1$, $\sigma_3 = 0$) и вместо $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ подставить τ_s . В § 6 доказано, что отношение τ_{\max}/σ_u отличается от постоянного числа менее чем на 7% (при любых значениях σ_{ij}), и потому условия (17.8) и (17.9) близки.

В области пластического течения из (17.1), (17.2), (17.8) имеем связь между σ_{ij} и v_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{2\sigma_s}{3v_u} v_{ij}. \quad (17.10)$$

Внося эти выражения в динамические уравнения $\sigma_{ij,j} + \rho(X_i - w_i) = 0$, получим замкнутую систему уравнений для вектора скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и среднего напряжения $\sigma(\mathbf{x}, t)$, если добавим условие несжимаемости (17.4).

Другое определение рассматриваемой среды при условии (17.8) получим из предположений:

1) свободная энергия ψ (при условии несжимаемости) зависит только от температуры

$$\psi = \psi(T), \quad s = -\psi'(T); \quad (17.11)$$

2) работа напряжений полностью рассеивается

$$\sigma_{ij} v_{ij} dt = \tilde{\sigma}_{ij} v_{ij} dt = w^* dt \geq 0 \quad (17.12)$$

(причем равна нулю только при $v_{ij} \equiv 0$);

3) девиатор напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$ зависит только от тензора скорости деформаций.

Из условий 2) и 3) и изотропии однозначно следует векторное свойство (17.2), так как w^* — инвариант и, значит, $\tilde{\sigma}_{ij} v_{ij}$ — инвариант тензора v_{ij} , т. е. $\tilde{\sigma}_{ij} = A v_{ij}$.

Если температура переменна, то из опытов известна зависимость $\sigma_s = \sigma_s(T)$. Учитывая закон теплопроводности Фурье и считая коэффициенты теплоемкости c и теплопроводности λ постоян-

ными, уравнение теплопроводности (баланса энтропии) получим в виде

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \sigma_s v_u. \quad (17.13)$$

Динамические уравнения, условие несжимаемости и соотношения (17.8), (17.10), (17.13) составляют замкнутую систему для v , σ и T .

Значения σ_s для сталей при нормальных температурах (даже до $+300^\circ\text{C}$) колеблются в зависимости от содержания углерода и лигирующих элементов от $2 \cdot 10^2$ до $2 \cdot 10^3$ МПа. В области температур от 300°C до температуры плавления (1200 — 1400°C) σ_s сильно падает, например, в десять раз при температуре около 1000°C . В области повышенных и высоких температур существенно проявляются свойства *ползучести*, т. е. течения с некоторой скоростью при постоянных (во времени) напряжениях. Это свойство не отражается условием (17.8), если $\sigma_s = \sigma_s(T)$; но им обладает соотношение (17.3), применяемое в теории установившейся ползучести.

3. Идеальная изотропная вязкопластическая среда — несжимаемое твердое тело при малых и конечных пластических деформациях или повышенных (высоких) температурах и давлениях, а также некоторые вязкие жидкости, смешанные с твердыми частицами (глинистые растворы и т. п.). Для этой среды:

1) векторные свойства совпадают со свойствами вязкой жидкости (17.1), (17.2);

2) скалярные свойства обобщены по отношению к нелинейно-вязким и пластическим, а именно

$$\sigma_u = \sigma_s + \Phi(v_u, T), \quad v_u \geq 0, \quad (17.14)$$

где Φ — некоторая известная функция, универсальная при различных процессах. Всегда $\Phi \geq 0$, и почти всегда $\partial\Phi/\partial v_u > 0$.

Эта среда обладает *ползучестью*, так как при $\sigma_u = \text{const}$, $T = \text{const}$ из (17.14) получается постоянная скорость ползучести

$$v_u = \Phi^{-1}(\sigma_u - \sigma_s), \quad (17.15)$$

но не релаксирует, так как при $v_u = 0$ (т. е. при постоянных во времени деформациях) $\sigma_u = \sigma_s = \text{const}$, т. е. напряжения не уменьшаются (§ 20).

Замкнутая система уравнений для такой среды определяется соотношениями (17.1), (17.2), (17.14), (17.13) и уравнениями $\sigma_{ij,j} + \rho(X_i - w_i) = 0$. При этом в (17.13) источник $\sigma_s v_u$ надо заменить на $\rho w^* = (\sigma_s + \Phi)v_u$ при $v_u \neq 0$.

4. Идеальная несжимаемая сыпучая среда — условно-твердое тело (типа сухого песка, зерна, гранулированных пород):

1) являющееся сплошным только при условии, что вектор нормального напряжения на любой площадке отрицателен;

2) максимальное касательное напряжение зависит только от нормального давления на соответствующей площадке;

3) векторные свойства совпадают с (17.1), (17.2).

Условие 1) в ортогональных координатах (x_i) имеет вид

$$N_v = \sigma_{ij} n_i n_j \leq 0, \quad (17.16')$$

где n_i — направляющие косинусы нормали к любой площадке. Условия отрицательности квадратичной формы (17.16') суть условия Сильвестра: определитель $|\sigma_{ij}|$ и все миноры главной диагонали должны быть отрицательны (иначе говоря, отрицательны все главные напряжения)

$$\det(\sigma_{ij}) < 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} < 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^2 < 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (17.16)$$

Условие 2) записывается сложно, так как требует использования явных выражений максимальных касательных напряжений через σ_{ij} , приведенных в конце § 6.

В случае плоской деформации в плоскости (x_1, x_2)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2},$$

$$-\sigma = -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = p = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

условие 2) имеет вид

$$\tau_{\max} = \mathcal{F}(p), \quad p > 0, \quad (17.17)$$

где \mathcal{F} — универсальная функция среды, зависящая от влажности. Например, вследствие сухого трения частиц может быть принят закон Кулона: $\mathcal{F}(p) = fp$, где f — коэффициент внутреннего трения (тангенс угла естественного откоса песчаной насыпи). В этом случае «условие текучести» среды будет

$$\tau_{\max}^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 = f^2 \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2. \quad (17.17')$$

Если между частицами кроме трения есть еще и сцепление, то $\mathcal{F}_1(p) = k + fp$, где k — константа сдвигового сцепления.

В общем случае условие 2) можно заменить приближенным

$$\sigma_u = \mathcal{F}_1(p), \quad 3p = -\sigma_{ij}\delta_{ij} > 0. \quad (17.17'')$$

Поскольку в случае плоской деформации $\sigma_u = \tau_{\max}\sqrt{3}$, то функция \mathcal{F}_1 может быть приближенно выражена через \mathcal{F}

$$\mathcal{F}_1(p) = \sqrt{3} \mathcal{F}(p),$$

и тогда в случае плоской деформации условия (17.17'), (17.17'') тождественно совпадут.

Напишем замкнутую систему уравнений МСС в случае плоской деформации при медленных движениях (в уравнениях движения отбрасываются силы инерции), учитывая, что $p = -\sigma_{33}$.

Компоненты напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} ,

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0,$$

т. е. три неизвестных σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} находятся из замкнутой системы уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (17.18)$$

и условия (17.17), так как в эти три уравнения вектор скорости не входит. Последний же определяется из условия несжимаемости (17.4)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0$$

и вытекающего из (17.2) одного независимого уравнения

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{4\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0. \quad (17.19)$$

В случае постановки динамической задачи система уравнений движения и условие несжимаемости обращаются в замкнутую систему для вектора скорости \mathbf{v} и среднего напряжения σ , если использовать вытекающие из (17.2) и (17.17) выражения напряжений через \mathbf{v} и σ :

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{2\mathcal{F}_1(p)}{3v_u} v_{ij} \quad (17.20)$$

и условия (17.16). Изложенная теория справедлива для сред малой влажности. Если зерна среды имеют *неплотную упаковку* и она сильно насыщена водой, то возможны явления *разжижения* среды и переупаковки, т. е. перехода в текучее состояние с более плотной упаковкой зерен. Для изучения этих явлений созданы другие математические модели МСС.

§ 18. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ НАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Среда теперь предполагается изотропной в начальный момент времени t_0 , с которого и начинается процесс $\pi(\tau) = (\tilde{\mathcal{E}}(\tau), T(\tau))$ с реакцией $r(\tau) = (\tilde{S}(\tau), \eta(\tau))$ в соответствии со скалярным тер-

модинамическим потенциалом свободной энергии $\psi_\eta: \dot{\psi}_\eta^t(\pi) = = r^t(\pi) \dot{\pi}(t)$. В § 9 введено 6-мерное евклидово пространство E_6 векторов деформации $\varepsilon(\tau) = \varepsilon_k(\tau) a_k$ и напряжения $\sigma(\tau) = \sigma_k(\tau) a_k$ ($k=0, 1, \dots, 5$) (9.43), (9.44), где z, y — сами векторы ε, σ или заданные линейные операторы по времени над ε, σ .

Пятимерное подпространство E_5 с репером a_k ($k=1, 2, \dots, 5$), или подпространство девiators, определяется компонентами z_1, \dots, z_5 , которые, как следует из (9.44), выражаются только через $\tilde{z}_{ij} = z_{ij} - z_0 \delta_{ij}/3$. Действительно, формулы (9.44) преобразуются к виду (при $k=0, 1, \dots, 5; i, j=1, 2, 3$)

$$\sqrt{\frac{3}{2}} z_k = \beta_k^{ij} z_{ij} + \frac{1}{\sqrt{2}} z_0 \delta_{k0}, \quad z_0 = z_{ij} \delta_{ij}, \quad (18.1)$$

причем z_0 — инвариант ортогональных преобразований лагранжевых координат при $t=t_0$ в теле, как и

$$z^2 = z_{ij} z_{ij} = \tilde{z}_{ij} \tilde{z}_{ij} + \frac{1}{3} z_0^2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 = \dot{z}_{ij} \dot{z}_{ij}, \dots$$

Базисом для представления любого вектора y в E_6 , связанным с траекторией процесса $z=z(\tau)$, может быть z и совокупность пяти первых производных вектора z по времени, т. е. $z, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^5 z}{\partial t^5}$, если они линейно независимы, или шести других линейно независимых фиксированных операторов по t над z ,

$$z_0, z_1, \dots, z_5, \quad z_k(t) = L_k^t z(\tau) \quad (k=0, 1, 2, \dots, 5), \quad (18.2)$$

коэффициенты которых являются инвариантами относительно ортогональных преобразований репера a_k и любого вектора y в E_6 : $a' = \alpha a, y' = \alpha y, \alpha^T \alpha = I$:

$$a'_k = \alpha_{kl} a_l, \quad y'_k = \alpha_{kl} y_l, \quad \alpha_{kl} \alpha_{km} = \delta_{lm}. \quad (18.3)$$

Примерами базисов могут быть векторы $z(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, в точках $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_5$, производные и интегралы вида

$$z_\alpha = \frac{d^{\alpha+1} z}{dt^{\alpha+1}}; \quad \text{или} \quad z_\alpha = \int_{t_0}^t A_\alpha(t, \tau) dz(\tau) \quad (\alpha=0, 1, \dots, 5), \quad (18.2')$$

если они линейно независимы между собой.

Длиной дуги s_y траектории вектора $y(\tau)$ называется величина

$$s_y(t) = \int_{t_0}^t \dot{s}_y(\tau) d\tau, \quad \dot{s}_y = \left| \frac{dy}{d\tau} \right| = \sqrt{\dot{y}_{ij} \dot{y}_{ij}}, \quad (18.4)$$

причем \dot{s}_y называется интенсивностью скоростей тензора y_{ij} или модулем скорости. Вектор $dy/dt - \dot{y}_0 a_0$ определяет скорость изменения девиатора \tilde{y}_{ij} . Таким образом, формулы (18.4) позволяют рассматривать компоненты тензора как функции времени, или функции длины дуги траектории.

Задание физического процесса в точке M тела (§ 9) требует задания не только тензора деформации $\tilde{\mathcal{E}}$, или тензора напряжений \tilde{S} , или другого физического тензора \tilde{Y} , но еще и температуры $T(t)$ и других нетермомеханических параметров β .

Траектория деформации $\mathfrak{z}(t)$ в E_6 при данном a_k с построенным в каждой ее точке вектором напряжения σ и приписанными каждой точке параметрами (T, β) называется *э-образом процесса в точке M тела*.

Для э-образа (18.4) принимают вид

$$ds = |d\mathfrak{z}| = \sqrt{\dot{\mathfrak{e}}_{ij}\dot{\mathfrak{e}}_{ij}} dt, \\ s = \int_{t_0}^t \dot{s} d\tau, \quad \dot{s} = \left| \frac{d\mathfrak{z}}{dt} \right| = \sqrt{\tilde{\mathfrak{e}}_{ij}\tilde{\mathfrak{e}}_{ij} + \dot{\mathfrak{e}}_0^2/3}. \quad (18.5)$$

Работа напряжений $S^{ij} \equiv s_{ij}$ на приращениях деформаций $d\mathfrak{e}_{ij}$ равна $s_{ij}d\mathfrak{e}_{ij}$ и включает работу сдвигов $\tilde{s}_{ij}d\tilde{\mathfrak{e}}_{ij}$; полная работа напряжений равна

$$\tilde{W} = \int_{t_0}^t s_{ij} d\mathfrak{e}_{ij} = \int_{t_0}^t \sigma d\mathfrak{z}. \quad (18.6)$$

Преобразования вращения и отражения в E_6 (18.3) содержат пятнадцать произвольных параметров.

Такие ортогональные преобразования называются *преобразованиями вращения* при $|a_{mn}| = +1$ и *отражения* — при $|a_{mn}| = -1$.

Физические процессы $\mathfrak{z}(t)$ и $\mathfrak{z}'(t) = \alpha \mathfrak{z}$ в точке M тела различны, что следует из (18.1). На основании (18.1) и свойств матриц $\beta_{ij}^k, \beta_k^{ij}$ (18.1) можно доказать, что *преобразование поворота системы координат* (x_i) в теле, определяемое тремя параметрами (углами Эйлера), есть частный случай преобразований вращения, как и изменение угла β , входящего в (18.1), представляет однопараметрическое вращение. Ясно, что *э-образ в E_6 инвариантен относительно этих двух преобразований*.

Из (18.3), (18.4) дифференцированием (18.5) по t получим

$$dy' = \alpha dy, \quad ds'_y = ds_y, \\ y'_r = \alpha y_r, \quad (y'_r)^2 = (y_r)^2, \quad y_r \equiv \frac{d^r y}{dt^r}, \quad y'_r \equiv \frac{d^r y'}{dt^r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (18.7)$$

Таким образом, длина дуги s_y и все производные вектора y и интегралы по времени t по модулю сохраняются при преобразовании вращения и отражения, т. е. внутренняя геометрия траектории вектора $y(t)$ в E_6 сохраняется.

Так как при преобразованиях (18.3) сохраняется скалярное произведение двух векторов, то применительно к векторам (18.2), например, $y, y_1 \equiv \frac{dy}{dt}, y_2 \equiv \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, y_r \equiv \frac{d^r y}{dt^r}$, при преобразованиях вращения и отражения сохраняются их длина и косинусы углов между ними. Длина дуги и кривизны всякой траектории $\vartheta(t)$ в E_6 — это ее естественные независимые внутренние параметры

$$\frac{d}{dt} = \dot{s} \frac{d}{ds}, \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{s} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \dot{s} \frac{d}{ds} \left(\dot{s} \frac{d}{ds} \right), \dots, \\ \dot{s}^6 \left(\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \right)^2 = \dot{s}^6 \kappa_1^2 = (\dot{\vartheta} \ddot{\vartheta}) (\ddot{\vartheta} \ddot{\vartheta}) - (\dot{\vartheta} \ddot{\vartheta})^2. \quad (18.8)$$

Рассмотрим косоугольный репер

$$\vartheta_1 \equiv p_1 = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad \vartheta_2 \equiv \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = \kappa p_2, \dots, \vartheta_6 \equiv \frac{d^6 \vartheta}{ds^6}. \quad (18.9)$$

В E_6 траектория $\vartheta(t) = \vartheta(s)$, $s = s(t)$ кроме длины дуги и первой кривизны $\kappa_1 = \kappa$, выражающихся формулами (18.8), имеет еще четыре параметра ($\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5$).

Ортогональный единичный естественный репер $p_{\alpha+1}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, 5$) строится из векторов косоугольного базиса $\vartheta_{\alpha+1}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, 5$). Шесть формул Френе с двучленными правыми частями имеют вид ($\kappa_0 = \kappa_6 = 0$)

$$p'_n = -\kappa_{n-1} p_{n-1} + \kappa_n p_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots, 6) \quad (18.10)$$

и позволяют выразить любую производную вектора ϑ по s , начиная с шестой, через p_1, p_2, \dots, p_6 , т. е. через шесть первых:

$$\frac{d^\alpha \vartheta}{ds^\alpha} = k_{\alpha k} \frac{d^k \vartheta}{ds^k} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, 6, \\ \alpha = 7, 8, \dots, \end{matrix} \quad (18.11)$$

где $k_{\alpha k}$ зависят от κ_l ($l = 1, 2, 3, 4, 5$) и их производных. Формулы (18.11), называемые «тождествами размерности», могут быть переписаны для векторов

$$\vartheta_m = k_{mk} \vartheta_k \quad (m = 7, 8, \dots; k = 1, 2, \dots, 6), \quad (18.12)$$

причем k_{mk} зависят от s , κ_l и их производных по t ; существенно, что векторы ϑ_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) алгебраически линейно независимы.

Произвольный вектор z , в том числе σ , в E_6 можно представить через его компоненты в репере Френе (18.9):

$$\sigma = A^n p_n \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6); \quad (18.13)$$

причем это — тождество, если A^k выражены через σ и p_k формулой $A^k = \sigma p_k$.

Базис (18.9) для представления 6-мерного вектора может быть заменен любым другим, построенным на основе \mathfrak{a} , например

$$\eta_k = \eta_{kl} a_l = \int_{t_0}^t N_k(t-\tau) d\mathfrak{a}(\tau) \quad (k, l=0, 1, \dots, 5), \quad (18.14)$$

$$\eta_{kl} = \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_{ij}^{kl} \int_{t_0}^t N_k(t-\tau) \dot{e}_{ij}(\tau) d\tau,$$

если функции времени $N_k(t)$ заданы и линейно независимы. Тогда (18.13) заменяется на изоморфное ему

$$\sigma = A_i^k \eta_k \quad (k=0, 1, \dots, 5). \quad (18.15)$$

Если ввести смешанный базис из производных по t от \mathfrak{a} и σ , то будет справедливо соотношение

$$C_m \sigma_m = D_n \mathfrak{a}_n \quad (m, n=0, 1, 2, \dots, 5; m+n=7), \quad (18.16)$$

которое при определенном выборе C_m, D_n будет тождеством, так как семь векторов в E_6 линейно зависимы.

Тело называется *начально изотропным*, если существует момент t_0 , в который его начальное состояние и структура в любой декартовой системе (x) характеризуется только единичным тензором второго ранга — константой $I = (\delta_{ij})$ ($i, j=1, 2, 3$) и тензорами других рангов на его основе:

$$\delta_{ij}, \delta_{ij}\delta_{mn}, \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{jm}\delta_{in}, \dots \quad (18.17)$$

Все соотношения между физическими функционалами для начально изотропного тела должны быть ковариантны относительно ортогональных преобразований \hat{a} начальной (лагранжевой) системы координат (x) в теле ($\hat{a}^T \hat{a} = I$):

$$x = ax'; \quad x^i = a_j^i x'^j \quad (i, j, k=1, 2, 3); \quad (18.18)$$

$$x' = \hat{a}^T x; \quad x'^i = a_i^j x^j; \quad x^2 = x'^2; \quad a_j^i a_k^j = \delta_{ik};$$

при этом $\hat{a} = \text{const}$, т. е. не зависит от времени и координат. Тензоры $e_{ij}, \tilde{e}_{ij}, \tilde{S}_{ij}, S_{ij}, \dots, y_{ij}, \dots$ преобразуются по формулам

$$y_{ij} = a_j^m a_i^n y_{mn}, \quad y_{ij}' = a_m^i a_n^j y_{nm} \quad (18.19)$$

и относительно этих преобразований имеют каждый три инварианта:

$$J_{1y} = \mathcal{Y}_{1y} = y_{kk}, \quad \mathcal{Y}_{2y} = y_{ij}y_{ij}, \quad J_{2y} = \frac{1}{2} (\mathcal{Y}_{1y}^2 - \mathcal{Y}_{2y}), \quad (18.20)$$

$$\mathcal{Y}_{3y} = y_{ik}y_{ki}y_{il} = 3\mathcal{Y}'_{3y} + \frac{3}{2} \mathcal{Y}_{1y}\mathcal{Y}_{2y} - \frac{1}{2} \mathcal{Y}_{1y}^3; \quad \mathcal{Y}'_{3y} = J_{3y} = |y_{ij}|;$$

пара тензоров y_{ij} , z_{ij} имеет еще смешанные инварианты

$$\mathcal{Y}_{yz} = y_{ij}z_{ij}, \quad \mathcal{Y}_{yyz} = y_{im}y_{mj}z_{ij}, \quad \mathcal{Y}_{yzz} = y_{lm}z_{mj}z_{il}, \quad (18.20')$$

тройка y_{ij} , z_{ij} , ζ_{ij} имеет, кроме типа (18.20), еще один

$$\mathcal{Y}_{yz\zeta} = y_{im}z_{mj}\zeta_{il}. \quad (18.20'')$$

Вообще группа из N тензоров y_{ij}^n ($n=1, 2, \dots, N$) приводит к тензору второго ранга с компонентами Y_{ij}^N в виде произведения и линейному инварианту

$$Y_{ij}^N = y_{im_1}^1 \dots y_{m_{n-1}m_n}^n \dots y_{m_N i}^N, \quad Y^N = Y_{ij}^N \delta_{ij}. \quad (18.21)$$

Характер возможных упрощений полиномов по нескольким тензорам виден из § 9 и тождества (9.13''), если в нем положить $Z = U + \lambda V$, считая λ произвольным и приравнять нулю коэффициенты при различных степенях λ . Получим тождества для пары тензоров U , V и т. д.

Основной постулат МСС утверждает, что задание процесса $\pi(\tau) = (\tilde{\mathcal{E}}, T, \beta)$ в точке M вполне определяет все физические функционалы (§ 10).

Выражение (18.13) будет представлять функционал состояния, если коэффициенты A^k из опытов будут найдены как функционалы $\tilde{\mathcal{E}}$, инвариантные относительно преобразований (18.19). Например, для апалитических процессов A^k ($k=1, 2, \dots, 6$) должны быть определены как инвариантные функции $\tilde{\mathcal{E}}$ и всех производных по t от $\tilde{\mathcal{E}}$. Первые инварианты всей группы производных тензоров выражаются через инвариант $\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \varepsilon_\theta$:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \varepsilon_{kk}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_{kk}, \quad \dots, \quad \overset{m.}{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij} = \overset{m.}{\varepsilon}_\theta, \quad \dots$$

Скорости тензора деформаций, ускорения всех порядков имеют вторые инварианты, входящие в (18.8), (18.10). Все они выражаются через производные по времени от шести внутренних характеристик траектории $\varepsilon(t)$ в E_6 . Третьи инварианты имеют вид

(18.20''), где y_{ij} , z_{ij} , ξ_{ij} есть производные тензора ε_{ij} различных порядков, включающие

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{3m} = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{jl}, \quad m=0, 1, 2, 3, 4, \dots,$$

и не выражающиеся операторами по t от s , x_1, \dots, x_5 .

Весь набор инвариантов, содержащий третьи инварианты тензора $\tilde{\mathcal{E}}$ и его производных, обозначим

$$\tilde{\mathcal{Y}}_3(\tilde{\mathcal{E}}, \dot{\tilde{\mathcal{E}}}, \ddot{\tilde{\mathcal{E}}}, \dots). \quad (18.22)$$

Следовательно, основной постулат МСС применительно к начально изотропным средам приводит к уравнениям состояния (18.13), в которых $A^k = A_t^k(\dots)$ ($k=1, \dots, 6$) суть физические функционалы длины дуги, кривизн, параметров (18.22), матрицы α (18.3) ортогональных преобразований процессов в изображающем пространстве E_6 , и теплофизических параметров T , β :

$$A^k = A_t^k[s(\tau), x_1(\tau), \dots, x_5(\tau); \varepsilon_0, T(\tau), \beta(\tau); \tilde{\mathcal{Y}}_3(\tau)]; \quad (18.23)$$

или приводит к (18.15), (18.16) и другим *изоморфным* (18.13), т. е. получающимся из (18.13) формальными преобразованиями на основании тождеств размерности (18.11).

Выраженный в виде формул (18.13), (18.23) основной постулат МСС для изотропных тел действительно полностью отображает свойство изотропной среды в физическом пространстве, поскольку определяющие соотношения коварианты относительно преобразования (18.18), (18.19) системы координат и тензоров y_{ij} в теле.

Из построения 6-мерного пространства E_6 ясно, что *при ортогональных преобразованиях репера* a_k , $k=0, 1, \dots, 5$ *шестимерного пространства* E_6 все параметры — аргументы, указанные в скобках (18.23), кроме $\tilde{\mathcal{Y}}_3$ и матрицы α , коварианты относительно 15-параметрических ортогональных преобразований (18.3).

Пятимерное пространство E_5 векторов $z = z_k a_k$ ($k=1, 2, \dots, 5$), как видно из таблицы коэффициентов β_k^{ij} ($i, j=1, 2, 3 \S 9$), есть пространство девиаторов (\tilde{z}_{ij}), поскольку

$$\sqrt{\frac{3}{2}} z_k = \beta_k^{ij} z_{ij} = \beta_k^{ij} \tilde{z}_{ij} \quad (k=1, 2, \dots, 5); \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_{ij} \delta_{ij}. \quad (18.24')$$

Модули и скалярные произведения любых пятимерных векторов y, z : $|z| = \tilde{z} = (\tilde{z}_{ij} \tilde{z}_{ij})^{1/2}$, $yz = \tilde{y} \tilde{z} \cos(y, z) = \tilde{y}_{ij} \tilde{z}_{ij}$, их производных по времени $\dot{z}^2 = \dot{\tilde{z}}_{ij} \dot{\tilde{z}}_{ij}$, $\dot{y}z = \dot{\tilde{y}}_{ij} \dot{\tilde{z}}_{ij}$, других линейных по t векторов — операторов над z суть инварианты ортогональных преобразований векторов y, z в E_5 : $y' = \alpha y$, $z' = \alpha z$, причем матрица α — 10-параметрическая: $\alpha \alpha^T = I$. Очевидно, что любое линейное соотноше-

ние в E_5 между векторами $y, y^{(1)}, \dots, z, z^{(1)}$ с коэффициентами, зависящими только от их инвариантов, инвариантно относительно ортогональных преобразований, т. е. пятимерное девиаторное пространство для них изотропно.

Опыты показывают, что *определяющие соотношения для сплошных начально изотропных сред в области сравнительно малых деформаций согласуются с постулатом изотропии: они инвариантны относительно ортогональных преобразований в E_5 ; образ физического процесса сохраняется при всех вращениях и отражениях в E_5 , если в соответствующих точках траектории сохраняются значения параметров $\varepsilon_{kk}(t), T(t), \beta(t)$. Это свойство настолько сильно упрощает экспериментальные исследования физических функционалов начально изотропных сред и законов в виде*

$$\sigma = A^k \varepsilon_k, \quad A^k = A_i^k[s, \kappa, \varepsilon_\theta, T, \beta] \quad (k=1, 2, \dots, 5), \quad (18.24)$$

$$\sigma_\theta = A_\theta[s, \kappa, \varepsilon_\theta, T, \beta], \quad \kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4),$$

что становится возможным даже *прямой метод решения краевых задач МСС без знания аналитических представлений скалярных функционалов A_i, A_i^k , но с помощью некоторых универсальных (не зависящих от типов краевых задач) экспериментальных установок**. При исследовании свойств новых сред естественно исходить из постулата изотропии и после выяснения степени точности (18.24) ставить задачу уточнения. Такое влияние \mathcal{F}_3 в области больших деформаций имеется, например, в нелинейной теории упругости (§ 16): формулы (16.15) можно привести к виду (18.13), но в (18.23) явно войдут третьи инварианты.

Основные характеристики степени сдвиговой деформации и сложности изотермических процессов в точке M тела — длина дуги s (18.5) и главная кривизна $\kappa_1 = \kappa$ (18.8), развернутые выражения которых

$$s = \int_{t_0}^t V \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} dt = \int_{t_0}^t \tilde{v} dt, \quad \tilde{v} = V \tilde{v}_{ij} \tilde{v}_{ij};$$

$$\kappa = \frac{\pm 1}{\tilde{v}^3} V \sqrt{\tilde{v}_{ij} \tilde{v}_{ij} \dot{\tilde{v}}_{mn} \dot{\tilde{v}}_{mn} - (\tilde{v}_{ij} \dot{\tilde{v}}_{ij})^2}, \quad \tilde{v}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$$

(18.25)

$$(i, j, n, m = 1, 2, 3),$$

* В 1962 г. в теории пластичности возник метод СН—ЭВМ: СН — машина для испытания в различных сочетаниях на растяжение, сжатие, кручение и гидростатическое давление круглых трубчатых или сплошных образцов металлов, ЭВМ — электронная вычислительная машина.

показывают, что это склерономные (не зависящие от масштаба времени) характеристики величин сдвигов и характера распределения их по различным физическим направлениям (волоконкам). В представлении (18.16), требующем существования меньшего числа производных от ε и σ сравнительно с (18.13), более удобны, вместо $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$, инвариантные в E_5 смешанные характеристики процесса нагружения

$$s, q_1 = |\sigma|, q_2 = d|\varepsilon|/ds, q_3 = \sigma d\varepsilon/(q_1 ds), \quad (18.26)$$

$$q_4 = dq_1/|d\sigma|,$$

причем коэффициенты C_m, D_m — функционалы по t параметров (18.26), а также ε_0 (или σ_0) и $T(\tau), \beta(\tau)$. В изотропном E_5 соотношения (18.16) можно привести к виду

$$\dot{\varepsilon} + D_0^t \varepsilon + D_2^t \ddot{\varepsilon} = C_0^t \sigma + C_1^t \dot{\sigma} + C_2^t \ddot{\sigma}, \quad (18.27)$$

$$f^t(\pi_5(\tau)) = 0, \quad \pi_5(\tau) = (s(\tau), q(\tau), \varepsilon_0(\tau), \sigma_0(\tau); T, \beta),$$

т. е. одному векторному и одному скалярному соотношениям; π_5 — указанный процесс в E_5 , $q = (q_1, \dots, q_4)$; $D_n^t(\pi_5), C_m^t(\pi_5), f^t(\pi_5)$ — операторы над $\pi_5(\tau)$. Для многих начально изотропных твердых и жидких тел в изотермических процессах соотношения

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{N} \dot{\sigma} + \frac{1}{M} \dot{s} \sigma, \quad (18.27')$$

$$\sigma_0 = f(\pi(t)), \quad \pi(t) = (\dot{s}, \rho, q_1, q_3),$$

N, M — функции $\pi(t)$, приближенно представляют (18.16).

Преобразование (18.27') к индексной форме получается умножением на матрицу $\tilde{\beta} = (\beta_{ij}^k)$; например,

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{N} \dot{\tilde{S}}_{ij} + \frac{1}{M} \dot{s} \tilde{S}_{ij}, \quad \sigma_0 \equiv S_{ij} \delta_{ij} = f(\pi), \quad (18.27'')$$

M, N, f — функции $\pi(\dot{s}, \rho, q_1, q_3)$, причем $\rho = \rho_0/\sqrt{g}$ и из (18.26)

$$q_1 = |\sigma| = \sqrt{\tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}}, \quad q_3 = \frac{\sigma \dot{\varepsilon}}{|\sigma| \dot{s}} = \frac{\tilde{S}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}}{\sqrt{\tilde{S}_{kl} \tilde{S}_{kl} \tilde{\varepsilon}_{mn} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{mn}}}. \quad (18.28)$$

В качестве базисных тензоров при построении E_6, E_5 выше были приняты в \mathcal{L} контравариантный $\tilde{S}(\mathcal{L}) = (S^{ij})$ и ковариантный $\tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) = (\varepsilon_{ij})$, сопряженные в смысле Лагранжа: $\delta'A = \tilde{S}d\tilde{\mathcal{E}} =$

$=S^{ij}d\varepsilon_{ij}=\sigma d\varepsilon$. Можно было бы взять любую другую сопряженную пару

$$\delta'A=\tilde{S}d\tilde{\varepsilon}=J^{ij}dz_{ij}=\tilde{J}d\tilde{z},$$

где $J(\mathcal{L})=\tilde{\mathcal{F}}_2(\mathcal{G}, \tilde{S})$, $\tilde{z}(\mathcal{L})=\tilde{\mathcal{F}}_2(\mathcal{G})$ — некоторые функции указанных тензоров. Среди них есть такие, что для них радиус сферы в подпространстве E_5 девиаторов \tilde{z} , внутри которой образ изотропен, не меньше, чем для $\tilde{z}=\tilde{\mathcal{G}}$.

Условие ковариантности общего функционала состояний $\tilde{S}=\tilde{\mathcal{F}}[\tilde{\mathcal{G}}]$ для начально изотропных тел относительно преобразований (18.19), т. е. сохранение его вида при замене $\tilde{S}=\hat{a}\tilde{S}'$, $\tilde{\mathcal{G}}=\hat{a}\tilde{\mathcal{G}}'$, означает, что $\tilde{\mathcal{F}}$ должен удовлетворять функциональному уравнению

$$\tilde{\mathcal{F}}[\hat{a}\tilde{Y}]=\hat{a}\tilde{\mathcal{F}}[Y]. \quad (18.29)$$

Функционалы (18.13) с коэффициентами вида (18.23) удовлетворяют этому уравнению.

§ 19. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ НАЧАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Если напряжения в начально изотропном твердом теле ограничены условием пластичности (§ 17), то под действием нагрузок при $\sigma_u < \sigma_s$ оно обычно ведет себя как идеально упругое (§ 17, 16). Ниже имеются в виду металлы и сплавы при нормальных температурах, но многие другие тела обладают такими же свойствами.

Рассмотрим сначала *малые деформации*, при которых 5-мерное пространство девиаторов E_5 (§ 18) изотропно, что с достаточной точностью установлено экспериментально. На траектории деформации $\varepsilon(s)$ в каждой ее точке $s(t)$ по какому-нибудь закону (в опытах — по желанию экспериментатора) задается плотность или объемная деформация $\varepsilon_\theta=0(s)$, и в соответствии с постулатом изотропии возникает вектор напряжения σ_s , определяемый векторно-линейным функционалом (18.13) или (18.16), или

$$\sigma(s)=\tilde{\mathcal{F}}^s(\varepsilon(s'), \theta(s')). \quad (19.1)$$

При ортогональных преобразованиях в E_5 эти соотношения сохраняются, ориентация вектора $\sigma(s)$ при одинаковых $\theta(s')$ относительно репера Френе и его модуль $|\sigma|=\sigma(s')$ сохраняются, т. е. все траектории, жестко повернутые в E_5 или отраженные в зеркале любой размерности, скрепленном с репером Френе в любой фиксированной точке процесса $\varepsilon(s)$, тождественны, образ всего процесса и реакции сохраняются. Достаточно изучить опе-

ратор (19.1) на каком-нибудь процессе $\varepsilon = f(s)$ в E_5 , как он будет известен для всего бесконечного множества процессов $\tilde{a}f(s)$, которые в физическом теле совершенно различны. Поэтому такой подход к нахождению определяющих соотношений в МСС называется *теорией процессов*, физическая достоверность их равноправна достоверности постулата изотропии.

При движении конца вектора $\varepsilon(s)$ (изображающей процесс точки) вдоль прямого луча (из точки O) до определенной точки K_s $|\varepsilon| = \varepsilon_s(p)$, $|\sigma| = \sigma_s(p)$ деформации будут *упругими*. Если в E_5 в разных направлениях проводить лучи, на которых от O до K_s давление $p(s)$ (или $\theta(s)$) одинаково, то точки K_s в силу симметрии (изотропии E_5) расположатся на поверхности *сферы* радиуса $\varepsilon_s(p)$. Если в E_5 строить соответствующие лучевым деформациям напряжения $\sigma(t)$, то согласно постулату они будут тоже лучевыми, граница $|\varepsilon| = \varepsilon_s$, $|\sigma| = \sigma_s$ будет сферой радиуса σ_s , условие

$$|\sigma| \leq \sigma_s \quad (19.2)$$

называется *условием пластичности Мизеса*. Учитывая установленное свойство почти постоянства отношения $\tau_{\max}/|\sigma|$ (§ 6), при сохранении режима $p(s)$ или $\theta(s)$ в опытах, условие пластичности Мизеса можно заменить *условием пластичности Сен-Венана*

$$\tau_{\max} \leq \tau_s. \quad (19.3)$$

Ясно, что если по прямым лучам вести процессы с неодинаковыми $p(s)$ или $\theta(s)$, поверхности $|\sigma| = \sigma_s(\sigma, p)$, $|\varepsilon| = \varepsilon_s(\varepsilon, 0)$ могут не быть сферами. Но часто σ_s , ε_s не зависят от p .

Лучевые нагружения или деформирования называются *простыми*. При простых нагружениях-разгрузках (обратных движениях по лучу) очевидно, что определяющее уравнение имеет вид

$$\sigma = B\varepsilon. \quad (19.4)$$

Определяющие соотношения (18.16) во многих случаях малых деформаций металлов, как уже отмечалось (§ 18), аппроксимируются двучленной формулой

$$d\varepsilon = \frac{1}{N} d\sigma + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{N} \right) \frac{d\sigma}{\sigma} \sigma, \quad \frac{d\sigma}{P} = \cos \vartheta ds. \quad (19.5)$$

Коэффициенты N , P зависят от параметров

$$q_1 = |\sigma| = \sigma, \quad q_2 = \frac{d\sigma}{|d\sigma|}, \quad q_3 = \frac{\sigma d\varepsilon}{\sigma ds} \equiv \cos \vartheta. \quad (19.6)$$

Угол ϑ называется (по его геометрическому смыслу в E_5) углом сближения вектора напряжения σ с вектором $p_1 = d\varepsilon/ds$ касательной к траектории процесса $\varepsilon(s)$.

Теория малых упругопластических деформаций основана на свойствах медленных (квазистатических) процессов простого нагружения-разгрузки, которые с большой точностью реализуются в теле, если его нагружения-разгрузки просты, т. е. все внешние силы, произвольные по координатам (\mathbf{x}), во времени возрастают и убывают пропорционально одному общему параметру λ . В E_5 для каждой точки M тела такой процесс изображается движением конца вектора $\mathbf{\varepsilon}$ вдоль какого-то своего луча. Координатная запись (19.4) и принимаемый при этом закон Гука для объемной деформации (§ 15) содержат K и B ,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = B \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad -p = K\theta, \quad (19.7)$$

причем B — функционал единственного независимого параметра $q = d|\mathbf{\varepsilon}|/ds$ по длине дуги s .

Назовем *алгебраическим модулем деформаций* при простых нагружениях-разгрузках величину ε_a , связанную с $\mathbf{\varepsilon}$ и $q(s)$ соотношениями

$$d\varepsilon_a = d\varepsilon; \quad \varepsilon_a = \int_0^s q(s') ds'; \quad q = \pm 1; \quad \varepsilon = |\varepsilon_a|. \quad (19.8)$$

Пусть \mathbf{P}_0 — определенный постоянный единичный вектор на траектории $\mathbf{\varepsilon}(s)$. Тогда, очевидно, при простых нагружениях-разгрузках

$$\mathbf{\varepsilon}(s) = \varepsilon_a(s) \mathbf{P}_0. \quad (19.9)$$

Алгебраическим модулем напряжений σ_a назовем величину, определяемую равенством

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_a \mathbf{P}_0, \quad \sigma = |\sigma_a|. \quad (19.10)$$

Из (19.7) находим выражение

$$B = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} = \frac{1}{\varepsilon_a} \sigma_a^s[\varepsilon_a(s')]. \quad (19.11)$$

Поскольку ε_a — известный функционал $q(s)$ (19.8), задача определения функционала B сводится к определению функционала $\sigma_a[q]$.

Свойства функционала пластичности B и его представление для каждого материала при заданной постоянной температуре T могут быть установлены в опытах на кручение тонкостенного трубчатого образца моментом $M_{кр}$. Единственные отличные от нуля компоненты тензора напряжений и деформаций в трубке при выборе цилиндрических координат «1» — по образующей, «2» — по окружной координате

$$\sigma_{12} = \tilde{\sigma}_{12} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 h}, \quad 2\varepsilon_{12} = 2\tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{\varphi l}{R}, \quad (a)$$

где R — средний радиус, h — толщина стенки, l — длина трубки, φ — угол закручивания трубки на длине l .

Выражения основных величин через σ_{12} , ε_{12} :

$$\sigma_a = \sigma_{12} \sqrt{2}, \quad \varepsilon_a = \varepsilon_{12} \sqrt{2} = \int_0^s q(s') ds', \quad B = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a}. \quad (6)$$

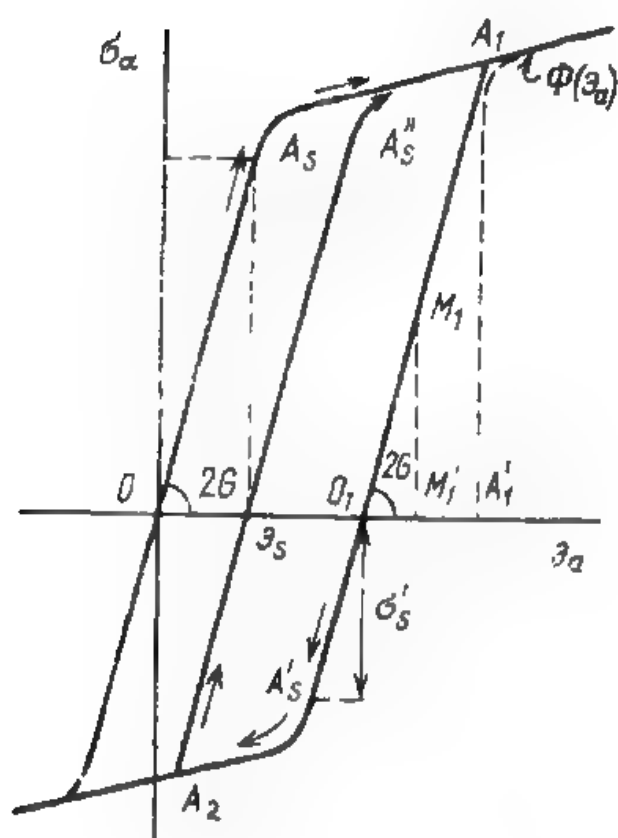


Рис. 19.1

На рис. 19.1 показаны результаты испытания. Так как направления кручения равноправны, картина в первой и третьей четвертях одинакова. В пределах участка OA_s $\sigma_a = 2G\varepsilon_a$ ($-\varepsilon_s < \varepsilon_a < \varepsilon_s$, $\varepsilon_s = \sqrt{1,5} \varepsilon_s$). При движении от точки A_s к A_1 и далее зависимость определяется универсальной кривой активной деформации

$$\sigma_a = \Phi(\varepsilon_a), \quad B = \frac{\Phi(\varepsilon_a)}{\varepsilon_a}, \quad q = +1. \quad (b)$$

Если в точке A_1 ($\varepsilon_a = \varepsilon = \varepsilon_a^1$) уменьшать деформацию ($q = -1$), то напряжение будет убывать по прямой $A_1 A'_s$ с наклоном $2G$, пройдя через точку O_1 , где $\sigma_a = 0$; $\varepsilon_a = \varepsilon_1^{(p)} = \varepsilon - \varepsilon_s$ называется *пластической деформацией*, соответствующей раз-

грузке из точки A_1 . Для *пассивной деформации* на участке $A_1 A'_s$

$$\sigma_a^1 - \sigma_a = 2G(\varepsilon_a^1 - \varepsilon_a),$$

или

$$B = 2G - \frac{2G\varepsilon_a^1 - \Phi(\varepsilon_a^1)}{\varepsilon_a}, \quad \varepsilon_a^1 - 2\varepsilon_s \leq \varepsilon_a \leq \varepsilon_a^1 \geq \varepsilon_s, \quad (r)$$

где $\varepsilon_s = \sqrt{1,5} \varepsilon_s$, ε_s — константа материала (у сталей $\sim 10^{-3}$). При дальнейшем уменьшении ε_a кривая $A'_s A'_2$ приблизительно одинакова с $A_s A_1$ и называется участком *вторичных пластических деформаций*.

Ограничиваясь простым нагружением $OA_s A_1$ и упругой разгрузкой $A_1 A'_s$, закон связи (19.7) можем записать в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} > 0, \quad (19.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^1 = 2G(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}^1), \quad \frac{d\varepsilon}{dt} < 0.$$

В общем случае функционал $B[\varepsilon]$ строится на основании диаграммы (рис. 19.1) так: параметру s задаем непрерывно возрастающие значения от 0 до любого значения (пластические деформации возникнут при $s > \varepsilon_s$) и задаем программу нагружений-разгрузок, т. е. функцию $q(s) = \pm 1$, например

$$q=1, \quad 0 \leq s' < s_1; \quad q=-1, \quad s_1 < s' < s_2; \quad q=+1, \quad s_2 < s' < s_3, \dots, \quad (19.13)$$

находим $\varepsilon_a(s)$, т. е. «путь» на диаграмме рис. 19.1:

$$\varepsilon_a(s) = \int_0^s q(s') ds' = \begin{cases} =s, & s \leq s_1; \\ =2s_1 - s, & s_1 \leq s \leq s_2; \\ =s - 2(s_2 - s_1), & s_2 \leq s \leq s_3; \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (19.14)$$

Следуя этим путем изменения ε_a по s , найдем соответствующие $\sigma_a(s)$ и $B(s)$ (19.7).

Соотношения (19.7), (19.12) можно записать в общей форме, если ввести вместо функции $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ обратную ей $\varepsilon = \Phi^{-1}(\sigma)$ и обозначить отношение

$$\frac{\Phi^{-1}(\sigma)}{\sigma} = \frac{1 + \varphi(\sigma)}{2G}. \quad (19.15)$$

Тогда деформацию ε_{ij} можно представить в виде суммы упругой $\varepsilon^{(e)}$ и пластической $\varepsilon^{(p)}$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)}, \quad (19.16)$$

причем

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} + \frac{3\nu}{1+\nu} p \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2G} \left(\tilde{\sigma}_{ij} - \frac{1-2\nu}{1+\nu} p \delta_{ij} \right), \quad (19.17)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{\varphi(\sigma)}{2G} (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) = \frac{\varphi(\sigma)}{2G} \tilde{\sigma}_{ij},$$

где ν — коэффициент Пуассона. Обозначая $\sigma^s = \sqrt{2/3} \sigma_s$, из вида функций $\Phi(\varepsilon)$ и $\Phi^{-1}(\sigma)$ (рис. 19.1) заключаем, что при активном нагружении ($d\sigma/dt > 0$) $\varphi(\sigma) = 0$, $\sigma < \sigma^s$, и возрастает вдоль кривой $A_s A_1$. В точке A_1 отрезок OA_1' представляет полную деформацию $\varepsilon_{12}(A_1)$, отрезок OO_1 — пластическую деформацию $\varepsilon_{12}^{(p)}(A_1)$, отрезок

зок O_1A_1' — упругую деформацию $\varepsilon_{12}^{(e)}(A_1)$. При разгрузке ($d\sigma/dt < 0$) из точки A_1 текущая деформация $\varepsilon_{12}(OM_1')$ состоит из той же пластической $\varepsilon_{12}^{(p)}(A_1)$ плюс упругая O_1M_1' , т. е. $\varepsilon_{12}^{(e)} = \sigma_{12}/2G$. Таким образом, на всем пути $OA_sA_1O_1A_s'$ (и обратно на $A_s'O_1A_1$) формула (19.16) остается правильной, только на пути $A_1O_1A_s'$ (и $A_s'O_1A_1$) пластическая деформация $\varepsilon_{ij}^{(p)}(A)$ заморожена, т. е. остается равной $\varepsilon_{ij}^{(p)}(A_1)$

$$\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{\varphi(\sigma^1)}{2G} (\sigma_{ij}^1 + p^1 \delta_{ij}).$$

Законы упругопластических деформаций, установленные выше, дают выражения напряжений $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - p\delta_{ij}$ через деформации $\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + 1/3\theta\delta_{ij}$, а значит, и через перемещения u_i ; уравнения движения при этом образуют замкнутую систему.

Теорией пластического течения обычно называется вариант соотношений (19.5) при $N = 2G = \text{const}$ и P , зависящем от напряжения σ , пластической деформации

$$\vartheta^{(p)} = V \varepsilon_{ij}^{(p)} \varepsilon_{ij}^{(p)}$$

или работы на пластических деформациях

$$W_p = \int \sigma d\vartheta^{(p)},$$

но не от q_1, q_3, q_4 (19.6).

Без этих ограничений функции N, P исследованы: для процессов деформации малой кривизны $\kappa \ll h^{-1}$, где h порядка $(3 \sim 10)e_s$; средней кривизны $\kappa \sim h^{-1}$; процессов в виде «веера» двухзвенных ломаных.

В точке O_1 (рис. 19.1) при разгрузке из A_1 напряжение исчезает, при возвратном процессе из O_1 в A_1 деформация упругая, точки A_1 и A_s' — новые пределы упругости в состоянии O_1 . Такое же явление наблюдается и в общем случае в пространстве E_5 . На рис. 19.2 показана сфера радиусом ε_s , внутри которой деформации упругие ($\sigma = 2G\varepsilon$).

Любой процесс OA_sA_1 сопровождается пластическими деформациями (A_s — любая точка на сфере). Для простоты пренебрегая упругой деформационной анизотропией, имеем

$$\vartheta^{(p)} = \vartheta - \vartheta^{(e)}, \quad \vartheta^{(e)} = \frac{\sigma}{2G}. \quad (19.18)$$

Продолжая процесс из A_1 , обнаружим, что $\vartheta^{(p)}$ для одних направлений A_1A_1' продолжают изменяться, но для других A_1A_1'' они остаются постоянными. Граница, разделяющая область продолжаю-

щихся пластических деформаций от области, где они «заморожены», называется *поверхностью текучести* для процесса OA_sA_1 :

$$\mathcal{F}_{OA_1} = \mathcal{F}(\mathfrak{z}) = 0. \quad (19.19)$$

Существует такое направление разгрузки $A_1O_1A'_s$ (рис. 19.2), для которого упругая деформация в точке O_1 полностью исчезает и вектор $\mathbf{OO}_1 = \mathfrak{z}^{(p)}$ будет представлять замороженную пластическую

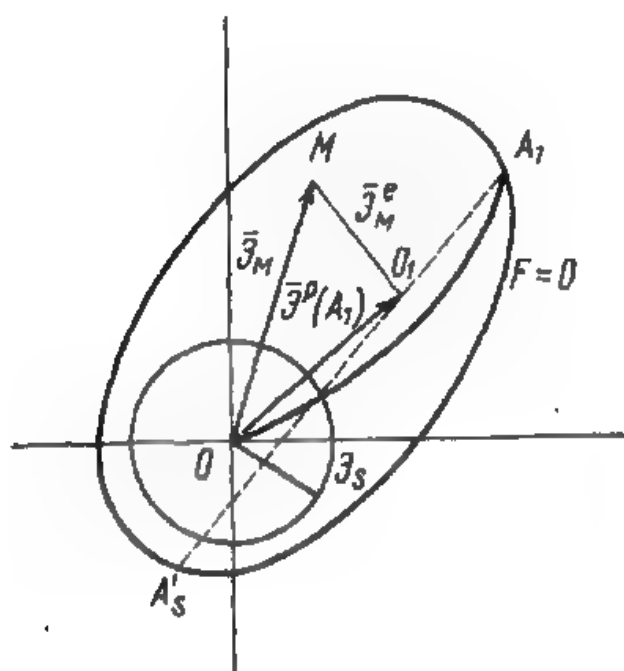


Рис. 19.2

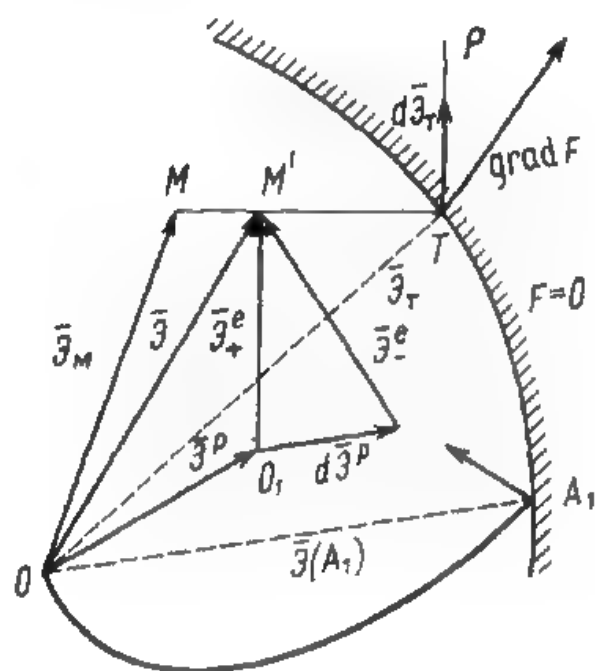


Рис. 19.3

деформацию для перехода из A_1 в любую точку M . Таким образом, всякий процесс движения точки $M(\mathfrak{z}_M)$ внутри $\mathcal{F}=0$ упруго обратим, причем $\mathfrak{z}^{(p)} = \text{const} = \mathfrak{z}^p(A_1)$; вектор $\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \mathfrak{z}_M^e$ представляет упругую деформацию в точке M .

Постулат пластичности: на всяком замкнутом по деформациям изотермическом процессе работа напряжений неотрицательна — установлен для малых и конечных деформаций:

$$A = \int_{\mathfrak{z}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \oint_{\mathfrak{z}} \sigma d\mathfrak{z} - \oint_{\theta} p d\theta = \oint_{\mathfrak{z}} \sigma d\mathfrak{z} \geq 0. \quad (19.20)$$

Работа давления $p = -K\theta$ исчезнет, так как $-pd\theta = K/2d(\theta^2)$. Из основного термодинамического соотношения $\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} = \rho_0 d\psi + \omega^* dt$ для всякого замкнутого по параметрам состояния $\mu(\mu_1, \mu_2, \dots)$ процесса имеем

$$\omega^* \geq 0, \quad A_{\mu} = \oint_{\mu} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \oint_{\mu} \omega^* dt \geq 0,$$

так как интеграл от $d\psi(\mu)$ равен нулю. Отсюда, однако, не следует (19.20), так как ϵ_{ij} при пластических деформациях не явля-

ются параметрами μ , т. е. процесс, замкнутый по ε_{ij} , может быть не замкнут по μ , и потому $A_\mu \neq A$. Если предположить, что при $T = \text{const}$ $\mu = \varepsilon^{(e)}$ и $\omega^* dt = \sigma d\varepsilon^{(p)}$, то получим $\sigma = 2G\varepsilon^{(e)}$, $\sigma d\varepsilon^{(p)} \geq 0$.

Рассмотрим замкнутый по деформациям процесс $MTPTM$ (рис. 19.3), выходящий на $d\varepsilon_T$ в точке T за пределы поверхности $\mathcal{F} = 0$ и потому дающий приращение пластической деформации $d\varepsilon^{(p)}$. Для прямого MTP и обратного PTM путей ε одинаково, $d\varepsilon$ меняет знак на обратный, и потому

$$A = \int_{MT} (\sigma_{MT} - \sigma_{TM}) d\varepsilon + \int_{TP} (\sigma_{TP} - \sigma_{PT}) d\varepsilon. \quad (19.21)$$

Поскольку $TP = d\varepsilon_T$ бесконечно мал, то и изменение $\sigma_{TP} - \sigma_{PT}$ будет бесконечно малым, и потому второе слагаемое в (19.21) может быть отброшено. На MT упругая деформация обозначена $\varepsilon_{(+)}^{(e)}$, на обратном $-\varepsilon_{(-)}^{(e)}$; их разность

$$\varepsilon_{(+)}^{(e)} - \varepsilon_{(-)}^{(e)} \equiv \frac{\sigma_{MT} - \sigma_{TM}}{2G} = d\varepsilon^{(p)},$$

и потому

$$\frac{1}{2G} A = \int_{MT} d\varepsilon^{(p)} d\varepsilon = d\varepsilon^{(p)} \int_{MT} d\varepsilon = d\varepsilon^{(p)} MT,$$

причем $d\varepsilon^{(p)}$ зависит только от $d\varepsilon_T$ и точки T на $\mathcal{F} = 0$, но не от точки M . Следовательно, для любого вектора MT внутри $\mathcal{F} = 0$

$$MT d\varepsilon^{(p)} \geq 0; \quad (19.22)$$

но это возможно только при условии, если $d\varepsilon^{(p)}$ имеет направление, совпадающее с нормалью к \mathcal{F} в точке T , т. е.

$$d\varepsilon^{(p)} = D \text{grad } \mathcal{F}(\varepsilon) d\lambda_1 = D_1 \mathbf{v} d\lambda, \quad (19.23)$$

где D — некоторый функционал процесса OA_1 и точки T (любой на \mathcal{F}), λ — параметр, \mathbf{v} — единичный вектор нормали в точке $\varepsilon = \varepsilon_1$ к поверхности $\mathcal{F} = 0$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, 5).$$

Соотношение (19.23) называется ассоциированным с (19.19) законом текучести, и оно есть частный случай общего выражения закона связи $\tilde{\sigma} \sim \tilde{\varepsilon}$ (18.16), но содержит не пять, а только два скалярных функционала: \mathcal{F} и D .

Поскольку деформация ε связана с напряжением σ физическим законом $\varepsilon = \varepsilon[\sigma]$, то при такой замене поверхность (19.19) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \mathcal{F}(\varepsilon[\sigma]) = f(\sigma) = 0$$

и называется поверхностью нагружения.

Теория Прандтля—Рейсса получается в предположении, что вектор упругой деформации $\mathfrak{z}^{(e)} = \mathfrak{z}^{(e)}$, соединяющий точку O_1 с T , имеет постоянную длину

$$|\mathfrak{z}^{(e)}| = |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}^{(p)}| = \text{const} = \frac{\sigma^s}{2G} = \mathfrak{z}_s,$$

т. е.

$$2\mathcal{F} = (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}^{(p)})^2 - \mathfrak{z}_s^2 = 0. \quad (19.24)$$

Отсюда

$$\text{grad } \mathcal{F} = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}^{(p)} = \frac{\sigma}{2G}.$$

Из (19.23) получаем частный вид (19.5)

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{1}{2G} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \dot{\lambda}, \quad |\sigma| = \sigma^s = \text{const}, \quad (19.25)$$

где $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ — неопределенный параметр, причем $\dot{\lambda} = 0$ для $|\sigma| < \sigma^s$. В девиаторной форме соотношения (19.25) имеют вид для малых деформаций

$$\dot{\mathfrak{e}}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\tilde{\sigma}}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij} \dot{\lambda}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} = (\sigma^s)^2, \quad (19.26)$$

и представляют шесть независимых уравнений, связывающих σ_{ij} с \mathfrak{e}_{ij} и $\dot{\lambda}$. Присоединяя к ним $p = -K\theta$ и уравнения движения $\rho(\ddot{u}_i - X_i) = \sigma_{ij,j}$, получаем замкнутую систему. При разгрузке $\dot{\lambda} = 0$.

Для конечных деформаций обобщением (19.5) найдем соответствующие (19.25) определяющие соотношения в эйлеровом пространстве, если сделаем замены (§ 9): в (19.5)

$$\dot{\mathfrak{z}} \Rightarrow \tilde{v}_{ij}, \quad \sigma \Rightarrow \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad (19.27)$$

$$\dot{\sigma} \Rightarrow \hat{\tilde{\sigma}}_{ij} \equiv \frac{d\tilde{\sigma}_{ij}}{dt} + \tilde{\sigma}_{im} \omega_{mj} + \tilde{\sigma}_{jm} \omega_{mi}$$

и параметры (19.6) примем в виде

$$q_1 = \sigma, \quad q_4 = \dot{\sigma}/|\dot{\sigma}|, \quad q_3 = \cos \vartheta = \frac{\hat{\tilde{\sigma}}_{ij} v_{ij}}{\sigma \tilde{v}}, \quad (19.28)$$

$$\tilde{v}^2 = \tilde{v}_{ij} \tilde{v}_{ij} = \dot{s}^2, \quad |\dot{\sigma}| = \sqrt{\hat{\tilde{\sigma}}_{ij} \hat{\tilde{\sigma}}_{ij}}.$$

Получаем в Э:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N} \hat{\tilde{\sigma}}_{ij} + \left(\cos \vartheta - \frac{\dot{\sigma}}{N\tilde{\sigma}} \right) \frac{\tilde{\nu}}{\sigma} \tilde{\sigma}_{ij}. \quad (19.29)$$

В приближенных расчетах $N = k2G = \text{const}$ ($k = 0,75 \sim 0,8$), а функция

$$\tilde{\nu}\dot{\sigma} = f(\sigma, \vartheta) \quad (19.30)$$

берется из теории малых деформаций. В частном случае идеальной пластичности ($\dot{\sigma} = 0$) несжимаемого тела ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), $v_{kk} = \text{div } \mathbf{v} = 0$, $\tilde{\nu}_{ij} = v_{ij}$, получим (19.29) с заменой $\tilde{\nu} \cos \vartheta / \sigma$ на неопределенный множитель λ .

На основе гипотезы о существовании поверхности текучести и существования упругого потенциала внутри поверхности текучести можно определить упругую деформацию $\tilde{\mathcal{E}}^{(e)}$; на основе $\tilde{\mathcal{E}}$ и $\tilde{\mathcal{E}}^{(e)}$ построить тензорную характеристику конечной пластической деформации и с помощью постулата пластичности установить связь между скоростью роста пластической деформации и нормалью к поверхности текучести, подобную (19.23) для конечных упругопластических деформаций.

§ 20. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Линейная теория изотропной вязкоупругой среды относится к твердым телам со свойствами, которые в области малых деформаций весьма близки к свойствам полимерных материалов: натурального и синтетического каучуков, аморфных полимеров с малыми и большими молекулярными весами, полимеров в композиции с другими волокнами и других. В зависимости от температуры для этих материалов характерны стеклообразные состояния при низких температурах, когда они почти идеально упруги, и высокоэластические состояния при повышенных температурах, когда они значительно деформируются при малых напряжениях и имеют сильно выраженные временные свойства (релаксации, ползучести). Таким образом, все промежуточные состояния относятся к области практически распространенных температур. Теория относится и к другим телам как приближенно аппроксимирующая их *реологические* свойства.

Рассматриваемая среда линейна, т. е. в общем представлении функционала $\tilde{S} = \tilde{\mathcal{F}}^*(\tilde{\mathcal{E}}, T)$ сохраняется лишь один линейный по $\tilde{\mathcal{E}}$ функционал (9.19). Применяя такое представление к девиатору $\tilde{\sigma}_{ij}$ и среднему давлению p , получим основные соотношения линейной теории вязкоупругости*:

* $\tau = 0_-$, $\tau = 0_+$ означают стремление к нулю слева и справа; далее $\tau = 0$ в пределе интеграла понимать как $\tau = 0_-$.

$$\tilde{\sigma}_{ij}(t) = \int_{0-}^t \tilde{\Gamma}(t-\tau) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}(0-) = \tilde{\sigma}_{ij}(0-) = 0, \quad (20.1)$$

$$-p(t) = \int_{0-}^t \tilde{\Gamma}_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau.$$

Функции $\tilde{\Gamma}(t-\tau)$, $\tilde{\Gamma}_1(t-\tau)$, универсальные для данного вещества, называются соответственно ядрами сдвиговой и объемной релаксации. Вместо двух аргументов (t, τ) в них входит лишь разность $(t-\tau)$, что есть следствие предположения о независимости свойств от начала отсчета времени ($t_0=0$, $t_0 \neq 0$). Материалы, для которых в (9.19) $K_1(t, \tau) \neq K_1(t-\tau)$, называются *стареющими*. Рассматривая (20.1) как интегральные уравнения Вольтерра относительно деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$ и $\theta(t)$ и учитывая их разрешимость (ядра $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{\Gamma}_1$ таковы, что они *должны* быть разрешимы, так как задание процесса нагружения $\sigma_{ij}(t)$ в \mathcal{M} -опытах (§ 10) вполне определяет деформацию), получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = \int_0^t \tilde{K}(t-\tau) \tilde{\sigma}_{ij}(\tau) d\tau, \quad (20.2)$$

$$-\theta(t) = \int_0^t \tilde{K}_1(t-\tau) p(\tau) d\tau.$$

Соотношения (20.1), (20.2) в качестве частного случая должны содержать обычный закон Гука. Мало того, если процесс деформации или нагружения производить очень быстро в интервале $0 \sim t \rightarrow 0_+$, то рассматриваемые материалы обладают идеальной упругостью. Таким образом, если деформацию $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ мгновенно ($t \rightarrow 0_+$) увеличить от нуля до конечной величины ε_{ij} , то должно быть $\tilde{\sigma}_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}$. На основании (20.1) это возможно только в том случае, если ядро обладает свойством δ -функции Дирака.

Соотношения (20.2) справедливы для произвольного процесса нагружения. Полагая $\tilde{\sigma}_{ij}(t) = c_{ij}\delta(t)$, $-p(t) = c\delta(t)$, где c_{ij} , c — постоянные, находим из (20.2)

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = c_{ij} \tilde{K}(t), \quad \theta(t) = c \tilde{K}_1(t).$$

Внося все эти значения в (20.1) и сокращая постоянные, получим интегральные уравнения, связывающие между собой \tilde{K} и $\tilde{\Gamma}$:

$$\int_0^1 \tilde{K}(\tau) \tilde{\Gamma}(t-\tau) d\tau = \delta(t), \quad (20.3)$$

$$\int_0^t \tilde{K}_1(\tau) \tilde{\Gamma}_1(t-\tau) d\tau = \delta(t).$$

Легко проверить, что если внести значения \tilde{e}_{ij} , θ (20.2) под интегралы в (20.1) и потребовать, чтобы последние стали тождествами при любых $\sigma_{ij}(t)$, $\sigma(t)$, можно получить интегральные уравнения (20.3).

Теперь можно исключить особенности в ядрах \tilde{K} и $\tilde{\Gamma}$, полагая

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{2G} \delta(t) + K(t), \quad (20.4)$$

$$\tilde{\Gamma}(t) = 2G\delta(t) - \Gamma(t),$$

$$\tilde{K}_1(t) = \frac{1}{K} \delta(t) + K_1(t),$$

$$\tilde{\Gamma}_1(t) = K\delta(t) - \Gamma_1(t), \quad (20.5)$$

где K , G — постоянные, называемые мгновенными модулями (§ 15), $K(t)$, $\Gamma(t)$ — регулярные функции. Из (20.1) получим

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2G\tilde{e}_{ij} - \int_0^1 \Gamma(t-\tau) \tilde{e}_{ij}(\tau) d\tau, \quad (20.6)$$

$$-p = K\theta - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau.$$

Из (20.2) получим

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{2G} + \int_0^t K(t-\tau) \tilde{\sigma}_{ij}(\tau) d\tau, \quad (20.7)$$

$$-\theta = \frac{p}{K} + \int_0^t K_1(t-\tau) p(\tau) d\tau.$$

Интегральные уравнения (20.3) для регулярных ядер примут вид

$$2GK(t) = \frac{\Gamma(t)}{2G} + \int_0^t K(\tau) \Gamma(t-\tau) d\tau, \quad (20.8)$$

$$KK_1(t) = \frac{\Gamma_1(t)}{K} + \int_0^t K_1(\tau) \Gamma_1(t-\tau) d\tau.$$

Ядро $K(t)$ можно найти из опыта на ползучесть, после чего резольвенту $\Gamma(t)$ — из (20.8). Но резольвенту $\Gamma(t)$ можно также найти из опыта на релаксацию и проверить соответствие опыта и теории. Ядра K_1 , Γ_1 определять трудно, так как полимерные материалы малосжимаемы. При условии несжимаемости ($K=\infty$, $\operatorname{div} u=0$, следовательно, $\tilde{\epsilon}_{ij}=\epsilon_{ij}$), пренебрегая объемной ползучестью ($K_1=\Gamma_1=0$), будем иметь первые из соотношений (20.6), (20.7), (20.8).

Рассмотрим случай простого растяжения образца вдоль оси x_1 , когда $\sigma_{ij}=0$ при всех i, j кроме $i=j=1$, причем $\epsilon_{22}=\epsilon_{33}=-1/2\epsilon_{11}$, остальные $\epsilon_{ij}=0$. Обозначая $\sigma_1=\sigma_{11}$ — растягивающее напряжение, $\epsilon_{11}=\epsilon_1$ — удлинение, из (20.6), (20.7) найдем

$$\sigma_1(t) = 3G\epsilon_1(t) - \frac{3}{2} \int_0^t \Gamma(t-\tau) \epsilon_1(\tau) d\tau, \quad (20.9)$$

$$\epsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{3G} + \frac{2}{3} \int_0^t K(t-\tau) \sigma_1(\tau) d\tau.$$

В опыте на ползучесть быстро прикладывается и поддерживается постоянное напряжение $\sigma_1=\text{const}$ и наблюдается рост деформации $\epsilon_1(t)$. Из второго соотношения (20.9) находим

$$K(t) = \frac{3}{2\sigma_1} \frac{d\epsilon_1(t)}{dt},$$

т. е. ядро $K(t)$ пропорционально скорости ползучести, причем оно не должно зависеть от величины приложенного напряжения σ_1 (т. е. K одинаково при σ_1' , σ_1'' , ...).

В опыте на релаксацию мгновенно удлиняют образец до деформации $\epsilon_1=\text{const}$, которая сохраняется постоянной, и наблюдают падение напряжения. Из первого соотношения (20.9) находится $\Gamma(t)$. Найденные в этих опытах $K(t)$, $\Gamma(t)$ используются во всех задачах МСС для данного материала.

В модели Максвелла принимается $2/3K(t) = 1/(3Gt_r) = \text{const}$, причем постоянная t_r называется *временем релаксации*. В этом случае второе уравнение (20.9) имеет вид

$$3G\dot{\epsilon}_1 - \dot{\sigma}_1 = \frac{1}{t_r} \sigma_1;$$

решая его относительно σ_1 , найдем

$$\sigma_1 = 3G\epsilon_1 - \frac{3G}{t_r} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{t_r}} \epsilon_1(\tau) d\tau.$$

Следовательно, ядро релаксации в модели Максвелла $\Gamma = 2G/t_r \exp(-t/t_r)$. Ползучесть ($\sigma_1 = \text{const}$) этой модели идет с постоянной скоростью $\dot{\epsilon}_1 = \text{const}$, а релаксация напряжения (при $\epsilon_1 = \text{const}$) — экспоненциально. За время релаксации t_r напряжение σ_1 убывает в $e = 2,71828$ раза.

Соотношения (20.6), (20.7) чаще используются в виде, предложенном еще Больцманом,

$$\tilde{\sigma}_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\tilde{\epsilon}_{ij}(\tau), \quad -p = \int_0^t R_1(t-\tau) d\theta(\tau), \quad (20.10)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\tilde{\sigma}_{ij}(\tau), \quad -\theta = \int_0^t \Pi_1(t-\tau) dp(\tau),$$

к которому они на основании начальных условий

$$\begin{aligned} t=0_-, \quad \tilde{\sigma}_{ij} &= p = \tilde{\epsilon}_{ij} = \theta = 0, \\ R(0) &= 2G, \quad R_1(0) = K, \\ R(0)\Pi(0) &= R_1(0)\Pi_1(0) = 1 \end{aligned} \quad (20.11)$$

приводятся заменой

$$\Gamma(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = -R'(t), \quad \Gamma_1 = -R'_1(t), \quad (20.12)$$

$$K(t) = \Pi'(t), \quad K_1(t) = \Pi'_1(t),$$

R и Π называются соответственно приведенными *функциями релаксации и ползучести*. Относя ординаты каждой из кривых $\epsilon'_1, \epsilon''_1$ (рис. 20.1), к $2\sigma'_1/3, 2\sigma''_1/3$, убедимся, что они сольются в одну кривую, которая и есть функция ползучести $\Pi(t)$.

При небольших изменениях температуры $T = T_0 + \theta(t)$ функции R и Π в линейной по $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ и θ теории не должны зависеть от θ ,

соотношения (20.10) сохраняются, если только объемную деформацию θ заменить на

$$\theta_T = \theta - 3\alpha\vartheta. \quad (20.13)$$

Для простоты, пренебрегая объемной ползучестью, т. е. полагая $R_1(t) = K = \text{const}$, $R_1\Pi_1 = 1$, получим

$$\rho = -K\theta_T, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \int_0^t R(t-\tau) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau). \quad (20.14)$$

В линейной теории свободную энергию ψ следует считать квадратичным функционалом деформаций и температуры $\vartheta = T - T_0$ (§ 10). Но ϑ и $\theta_T = \theta - 3\alpha\vartheta$ являются термодинамическими параметрами состояния, $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t)$ — внешними параметрами. Следовательно, можно написать для единицы объема ($\rho_0\psi = \tilde{\psi}$):

$$\tilde{\psi} = -\frac{c\vartheta^2}{2T_0} + \frac{K}{2}\theta_T^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \mathcal{P}(t-\tau_1, t-\tau_2) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2), \quad (20.15)$$

где $\mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}(y, x)$ — некоторая неотрицательная функция — характеристика материала.

С термодинамической точки зрения в (20.15) предположено, что температура ϑ и объемное расширение θ — параметры состояния, и процесс π определен так:

$$\pi(\tau) = (\vartheta, \theta_T, \tilde{\varepsilon}_{ij}). \quad (20.16)$$

Полный дифференциал ψ по t равен

$$\begin{aligned} d\psi = & -\left(\frac{c\vartheta}{T_0} + 3\alpha K\theta_T\right) d\vartheta + K\theta_T d\theta + d\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) \int_0^t \mathcal{P}(t-\tau_1) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1) + \\ & + dt \int_0^t \int_0^t \mathcal{P}'(2t-\tau_1-\tau_2) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2). \end{aligned} \quad (20.17)$$

Вариация $\tilde{\psi}$ по определению (10.38) равна

$$\delta\psi = K\theta_T \delta\theta - \left(\frac{c\vartheta}{T_0} + 3\alpha K\theta_T\right) \delta\vartheta + \int_{\tau=0}^t \delta\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau \int_0^t \mathcal{P}(t-\tau, t-\xi) \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}(\xi) d\xi =$$

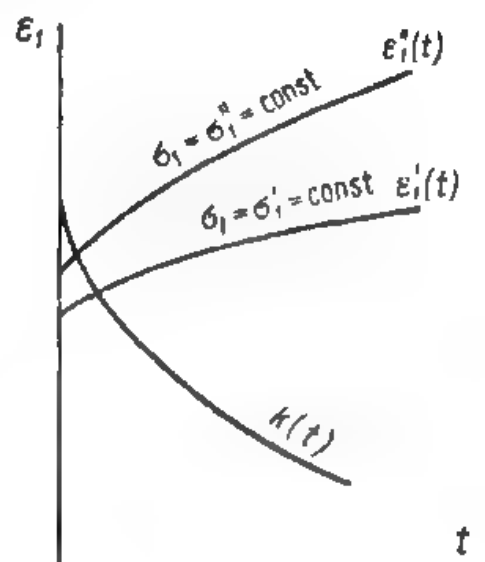


Рис. 20.1

$$\begin{aligned}
& \equiv \int_0^t \left[K\theta_T(t) \delta\dot{\theta}(\tau) - \left(\frac{c\dot{\theta}(t)}{T_0} + 3\alpha K\theta_T(t) \right) \delta\dot{\theta}(\tau) + \right. \\
& \left. + \int_{\xi=0}^t \mathcal{P}(t-\tau, t-\xi) \tilde{e}_{ij}(\xi) d\xi \delta\dot{e}_{ij}(\tau) \right] d\tau \equiv \int_0^t \frac{D\tilde{\psi}}{D\pi} \delta\dot{\pi}(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (20.17')$$

Следовательно,

$$\left(\frac{D\tilde{\psi}}{D\pi} \right)_{\tau=t} \dot{\pi}(t) = K\theta_T\dot{\theta} - \left(\frac{c\dot{\theta}}{T_0} + 3\alpha K\theta_T \right) \dot{\theta} + \tilde{e}_{ij} \int_0^t \mathcal{P}(0, t-\xi) d\tilde{e}_{ij}(\xi). \quad (20.18)$$

Теперь из (10.39), (20.17) и (20.18) находим функцию рассеяния

$$\begin{aligned}
\rho_0 w^* &= -\tilde{\psi}_w = \left(\frac{D\tilde{\psi}}{D\pi} \right)_t \dot{\pi} - \frac{d\tilde{\psi}}{dt} = \\
&= -\frac{1}{2} \iint_0^t \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(t-\tau_1, t-\tau_2) d\tilde{e}_{ij}(\tau_1) d\tilde{e}_{ij}(\tau_2) \quad (20.19')
\end{aligned}$$

и из (10.40) — уравнения состояния. При процессе π (20.16) реакция r включает энтропию s :

$$r = (s, -p, \tilde{\sigma}_{ij}).$$

Следовательно, в матричной форме

$$r = \left(\frac{D\tilde{\psi}}{D\pi} \right)_t, \quad (20.19)$$

или в компонентах

$$p = -K\theta_T, \quad s = \frac{c\dot{\theta}}{T_0} - 3\alpha p, \quad (20.19'')$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \int_0^t \mathcal{P}(t-\tau) d\tilde{e}_{ij}(\tau).$$

Предполагается, что рассматриваемый материал, как уже указывалось, мгновенно упругий. Сравнивая $\tilde{\sigma}_{ij}$ (20.19'') и (20.14), находим функцию

$$\mathcal{P}(z) = R(z) = \mathcal{P}(0, z). \quad (20.20)$$

Представление $\mathcal{P}(x, y)$ возможно в виде $\mathcal{P}(x+y)$, и тогда будет $R(x+y)$, следовательно,

$$\omega^* = - \int_0^t \int_0^t R' (2t - \tau_1 - \tau_2) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_2) \geq 0 \quad (20.21)$$

должно быть при любых $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t)$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}\delta_{ij}=0$. Для максвелловской модели, например, $R=R(0)\exp(-t/t_r)$, и потому всегда

$$\omega^* = \frac{1}{2Gt_r} \left[\int_0^t R(t-\tau_1) d\tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau_1) \right]^2 \geq 0. \quad (20.21')$$

Теплоемкость при $p=0$ равна $T_0 \frac{\partial \psi}{\partial T} = c$; второй закон термодинамики

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho \omega^*$$

и закон Фурье $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ дают уравнение теплопроводности

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \omega^* + 3\alpha T_0 \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (20.22)$$

Присоединяя к нему уравнения движения $\rho(\ddot{u}_i - F_i) = \sigma_{ij,j}$, закон $p = -K \operatorname{div} \mathbf{u}$ и выражения (20.14), получим замкнутую систему уравнений для \mathbf{u} и T , причем задачи МСС в рассматриваемом случае будут *связными*, т. е. уравнения для \mathbf{u} и T не разделяются, так как в (20.22) входит \mathbf{u} через ω^* ; в выражения σ_{ij} через $p = -K(\operatorname{div} \mathbf{u} - 3\alpha\theta)$ входит температура.

При $\omega^* \geq 0$ (20.21) и \tilde{s} (20.19'') условие (10.37)

$$\int_{t_1}^{t_1 + 2\pi/\omega} dt \int_V \rho T \tilde{s} dV = 0, \quad (20.23)$$

обеспечивающее требования к функции рассеяния ω^* , поставленные в § 10, будет выполнено.

§ 21. ДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Основные уравнения движения произвольной сплошной среды (8.14) — (8.16) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi \right) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \\ = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \lambda \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tilde{D}_s, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (21.1)$$

содержащем параметр $\lambda=1$, который фиксирует отличие этих уравнений от уравнений движения идеальной жидкости, поскольку для них девиатор напряжений \bar{D}_s равен нулю (§ 13), следовательно, можно формально положить $\lambda=0$.

В твердых упругопластических телах девиатор \bar{D}_s ограничен по модулю или норме $|\bar{D}_s| = \sigma = \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}}$ (§ 17, 19), и естественно, $\text{div } \bar{D}_s$ в (21.1) будет ограничена всюду также (кроме особых условий на границах и поверхностях разрывов касательных напряжений).

В вязких жидкостях (§ 14) $\bar{D}_s = 2\mu\bar{V}$, где μ — константа или функция (T, ρ) , в вязкопластических жидких и твердых телах $\bar{D}_s = 2m\bar{V}/\bar{v}$ (§ 17), где $2m = \sigma$ — функция модуля скорости деформации ($\bar{v}^2 = \tilde{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}$), температуры и давления, такая что при $\bar{v} \rightarrow 0$ функция m — конечна, а при $\bar{v} \rightarrow \infty$ функция $m/\bar{v} \rightarrow \mu$, т. е. складывается впечатление, что девиатор \bar{D}_s неограниченно возрастает

по модулю или норме $|\bar{D}_s| = \sigma = \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}}$. Однако из опытов известно, что коэффициент вязкости всех тел μ падает с увеличением числа Рейнольдса, т. е. с увеличением скорости \bar{v} .

При больших скоростях движения ограниченного тела размера l_0 с характерной скоростью v_0 , обладающего ограниченным по скорости деформации сдвиговым сопротивлением, $\sigma < \sigma_0(\rho, T)$ при $\bar{v} \rightarrow \infty$, при слабом возрастании сдвигового сопротивления σ вместе с ростом давления в области больших давлений, $(\sigma/\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, при условиях, которыми обычно обладают среды

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho} \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{v}} \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial T} \leq 0, \quad (21.2)$$

в уравнениях (21.1) λ можно считать малым параметром, который в первом приближении можно положить равным нулю. В первом приближении в области больших скоростей и давлений среды ведут себя как идеальные жидкости или газы. Следовательно, их асимптотические уравнения состояния получаются при свободной энергии ψ , диссипации w^* и функциях состояния (§ 13):

$$\psi = \psi(\theta, T), \quad \theta = \ln \frac{\rho_0}{\rho},$$

$$d\psi + s dT + p d\theta - (\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_{ij} - w^*) dt = 0, \quad (21.3)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad p = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad w^* = \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_{ij} \geq 0. \quad (21.3')$$

Условию неотрицательности $w^* \geq 0$ удовлетворяет не только $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma \tilde{v}_{ij}/\bar{v}$, но и (19.5), (19.6)

$$\tilde{v}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{N} + \frac{\tilde{v}}{M} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (N, M) > 0$$

и др.

В инерциальных системах координат скорость относительного движения не влияет на физические законы, поэтому, говоря о больших скоростях, надо иметь в виду, что скорость в некоторой точке области движения принимаемой инерциальной системы равна нулю. Например, равна нулю скорость центра масс и т. п. Пусть v_0 — характерная большая скорость; это значит, что

$$v_0 \gg \max \left(\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \dots \right).$$

Пусть p_0 — характерное большое давление

$$p_0 \gg \max (\sigma, \rho_0 v_0^2/2, \dots).$$

Пусть линейные размеры l_v, l_p, l_σ оценивают градиенты по модулю

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \sim \frac{v_0}{l_v}, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \sim \frac{p_0}{l_p}, \quad \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| \sim \frac{\sigma}{l_\sigma}$$

и пусть девиатор \tilde{D}_s оценивается двучленом

$$|\tilde{D}_s| \sim \sigma_0 \pm \mu v_0/l_v.$$

Тогда по порядку величин уравнение (21.1) имеет вид:

$$(1) \frac{v_0^2}{l_v} \pm (2) \frac{p_0}{\rho_0 l_p} \pm \frac{1}{\rho_0 l_\sigma} \left((3) \sigma_0 \pm (4) \mu \frac{v_0}{l_v} \right) \sim 0. \quad (21.1')$$

Отсюда получаем оценки относительного веса \tilde{D}_s сравнительно с двумя первыми слагаемыми

$$\lambda_{\sigma v} = (3)/(1) = \frac{l_v}{l_\sigma} \frac{\sigma_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad \lambda_{\sigma p} = (3)/(2) = \frac{l_p}{l_\sigma} \frac{\sigma_0}{p_0},$$

$$\lambda_\mu = (4)/(1) = \frac{l_v}{l_\sigma} \frac{1}{Re^{(0)}}.$$

Малость третьего и четвертого слагаемых сравнительно с (1) определяют малость, которую характеризует в (21.1) параметр $\lambda = 1$.

Во всех движениях рассматриваемого типа справедлив закон плоских сечений [62], который демонстрируется на примере аэродинамики больших скоростей. Ввиду несимметрии координат $x_i \times \times (i=1, 2, 3)$ используются обозначения: $x_1=x, x_2=y, x_3=z$.

В результате анализа движения тонких твердых тел с большими сверхзвуковыми скоростями в различных твердых, жидких и газообразных средах обнаружено следующее общее свойство, названное законом плоских сечений: если вектор скорости какой-нибудь точки правильного тела есть U и если поперечные скорости других его точек порядка не более εU , то при установившемся и

неустановившемся движениях тело вызывает в окружающей среде только поперечные возмущения, причем давление в любой точке поверхности тела, рассчитанное согласно этому закону, может отличаться от истинного на величину порядка не больше

$$\frac{1 + \varepsilon^2}{2M^2} \equiv \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{M^2} \right) \quad (21.4)$$

по сравнению с единицей.

Отсюда следует, что если перед телом двумя соседними параллельными плоскостями выделить плоский слой физических частиц среды, перпендикулярный вектору скорости U какой-нибудь точки тела, то при расчете давления с указанной степенью точности следует считать, что частицы среды будут совершать движения, параллельные плоскостям, так что плоскости для них будут как бы жесткими непроницаемыми стенками.

Закон плоских сечений существенно упрощает как постановку и решение задач сверхзвуковой аэродинамики, так и методы экспериментального исследования движения тел. Поэтому воспроизведем основные пункты доказательства этого закона.

Рассмотрим сначала случай установившегося движения тела и направим ось x по скорости потока, а оси y и z выберем в перпендикулярной плоскости, считая систему координат неподвижной относительно тела.

Косинус угла наклона нормали к поверхности тела с осью x обозначим

$$\cos(vx) = \varepsilon \cos \psi, \quad (21.5)$$

где ε , следовательно, максимальный угол наклона нормали к плоскости (y, z) , а ψ — заданная функция координат на поверхности тела.

Тогда на поверхности тела скорости среды должны удовлетворять условию

$$v_y \cos(vy) + v_z \cos(vz) = \varepsilon v_x \cos \psi. \quad (21.6)$$

Считая для общности, что тело имеет в плоскости (y, z) соизмеримые поперечные размеры, из (21.6) имеем следующие оценки скоростей на поверхности тела:

$$v_y \approx v_z \approx \varepsilon v_x, \quad (21.7)$$

т. е. скорости частиц в поперечном направлении в ε раз меньше скорости продольной.

Здесь и в дальнейшем символ \approx означает, что величины одного порядка по модулю, а символ \ll — что одна из них либо того же порядка, либо меньше другой.

Фронт ударной волны, вызываемой телом, движется относительно неподвижного газа со скоростью D , различной в разных

точках поверхности фронта, причем относительно тела он является неподвижным.

Следовательно, косинус угла наклона нормали к поверхности фронта с осью x равен

$$\cos(vx) = -\frac{D}{U}, \quad (21.8)$$

где U — скорость движения тела.

Условие сохранения массы, втекающей и вытекающей через площадку поверхности фронта волны, имеет вид

$$m_1 = -\rho_0 D = \rho_1 [v_x \cos(vx) + v_y \cos(vy) + v_z \cos(vz)], \quad (21.9)$$

а закон сохранения количества движения и импульсов дает уравнения

$$\begin{aligned} m_1 (U - v_x) &= (\rho_1 - \rho_0) \cos(vx); \\ m_1 (-v_y) &= (\rho_1 - \rho_0) \cos(vy); \\ m_1 (-v_z) &= (\rho_1 - \rho_0) \cos(vz), \end{aligned} \quad (21.10)$$

причем p_0, ρ_0 — давление и плотность невозмущенного газа (перед фронтом волны), а p_1, ρ_1 — их значения сразу же за фронтом.

К уравнениям (21.9) и (21.10) необходимо присоединить условие сохранения энергии, которое в общем случае эквивалентно уравнению Гюгоньо:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(k+1)\sigma + k - 1}{k + 1 + (k-1)\sigma} \quad \left(\sigma = \frac{p_1}{p_0} \right). \quad (21.11)$$

Поскольку энтропия газа выражается через величину σ :

$$J_s = \frac{R}{k-1} \ln \frac{p_1}{p_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^k = \frac{R}{k-1} \ln \sigma \left[\frac{k+1+(k-1)\sigma}{(k+1)\sigma+k-1} \right]^k, \quad (21.12)$$

так что $J_s = 0$ при $\sigma = 1$, то для краткости величину $\sigma = p_1/p_0$ будем называть энтропией.

Из (21.10) видно, что скорость частицы газа v_1 относительно неподвижного пространства, получаемая ею после прохождения фронта волны, направлена по нормали к фронту и равна

$$v_1 = -\frac{p_1 - p_0}{m_1} = \frac{1}{D} \frac{p_1 - p_0}{\rho_0} = \frac{(\sigma - 1) c_0^2}{kD} \quad \left(c_0^2 = \frac{k p_0}{\rho_0} \right), \quad (21.13)$$

где c_0 — скорость звука в невозмущенной среде. Следовательно,

$$v_x - U = v_1 \cos(vx), \quad v_y = v_1 \cos(vy), \quad v_z = v_1 \cos(vz). \quad (21.14)$$

Кроме того, умножая первое уравнение группы (21.10) на $\cos(vx)$, второе — на $\cos(vy)$, третьей — на $\cos(vz)$ и складывая, получим на основании (21.8) и (21.9)

$$D^2 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} = c_0^2 \left[1 + \frac{k+1}{2k} (\sigma - 1) \right]. \quad (21.15)$$

Исключая из (21.15) σ при помощи (21.13) и решая уравнение относительно D , находим

$$D = \frac{k+1}{4} v_1 + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4} \right)^2 v_1^2 + c_0^2}. \quad (21.16)$$

Отсюда имеем оценку порядка скорости ударной волны для любого v_1 :

$$D \approx c_0 + v_1. \quad (21.17)$$

Поскольку из (21.14) $v_1 \approx v_y \approx v_z$ и в соответствии с (21.6)

$$v_1 \approx v_y \approx v_z \approx \varepsilon v_x, \quad (21.18)$$

то для угла наклона ударной волны из (21.8) имеем

$$\cos(vx) \approx \frac{c_0 + v_1}{U} \approx \frac{1}{M} + \varepsilon. \quad (21.19)$$

Из первого уравнения (21.14) теперь имеем оценку для скорости v_x :

$$v_x - U \approx U(\varepsilon^2 + \varepsilon/M). \quad (21.20)$$

Граничное условие (21.6) теперь с точностью $\varepsilon^2 + \varepsilon/M$ сравнительно с единицей следует записать в виде

$$v_y \cos(vy) + v_z \cos(vz) = U\varepsilon \cos \psi, \quad (21.21)$$

причем с точностью ε^2

$$\cos^2(vy) + \cos^2(vz) = 1,$$

т. е. нормаль к поверхности можно в (21.21) заменить нормалью к контуру поперечного сечения, лежащей в плоскости (y, z) .

Условие на фронте ударной волны, вытекающее из (21.14) и (21.13), с точностью до $\varepsilon^2 + 1/M^2$ будет

$$v_y^2 + v_z^2 = \frac{2c_0^2}{k} \cdot \frac{(\sigma - 1)^2}{(k+1)\sigma + k - 1}, \quad (21.22)$$

причем энтропия σ выражается формулами (21.11) и (21.12) через плотность и давление.

Пусть a будет часть длины тела вдоль оси x , на которой $\cos(vx)$ изменяется на величину порядка ε , причем a соизмеримо

с длиной тела. Потребуем, чтобы поверхность тела была достаточно гладкой, а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos(vx)}{\partial x} &\approx \frac{\varepsilon}{a}, & \frac{\partial \cos(vx)}{\partial y} &\lesssim \frac{1}{a}, & \frac{\partial \cos(vx)}{\partial z} &\lesssim \frac{1}{a}, \\ \frac{\partial \cos(vy)}{\partial x} &\lesssim \frac{1}{a}, & \frac{\partial \cos(vy)}{\partial y} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon a}, & \frac{\partial \cos(vy)}{\partial z} &\lesssim \frac{1}{\varepsilon a}, \end{aligned} \quad (21.23)$$

причем для $\cos(vz)$ требования так же, как для $\cos(vy)$, должны выполняться почти всюду. Тогда, дифференцируя (21.21) по продольной дуге S

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(Sx) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(Sy) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(Sz) \approx \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}, \quad dy \approx \varepsilon dx$$

и учитывая найденные оценки: $v_y \approx v_z \approx \varepsilon U$ и (21.23), получим

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \varepsilon \frac{\partial v_y}{\partial y} \approx \frac{\partial v_z}{\partial x} \approx \varepsilon \frac{\partial v_z}{\partial z} \approx \frac{\varepsilon U}{a}. \quad (21.24)$$

Дифференцируя по поперечной дуге S , найдем

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} \approx \frac{\partial v_z}{\partial y} \approx \frac{U}{a}. \quad (21.25)$$

Точно так же можно дифференцировать соотношения (21.14) на фронте волны, причем из первого получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \approx \frac{U}{a} \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{M} \right). \quad (21.26)$$

Остальные же оценки совпадут с уже найденными.

Итак, из условия на поверхности тела и условий на фронте волны получились следующие согласованные оценки скоростей и их производных с точностью до $\varepsilon^2 + 1/M^2$:

$$\begin{aligned} v_x &= U, & v_y &\approx v_z \approx \varepsilon U, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &\approx \frac{U}{a} \left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{M} \right), & \frac{\partial v_x}{\partial y} &\approx \frac{\partial v_x}{\partial z} \approx \frac{\varepsilon U}{a}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &\approx \frac{\partial v_z}{\partial x} \approx \frac{\varepsilon U}{a}, & \frac{\partial v_y}{\partial z} &\approx \frac{\partial v_z}{\partial y} \approx \frac{\partial v_z}{\partial z} \approx \frac{U}{a}. \end{aligned} \quad (21.27)$$

Кроме того, не пренебрегая возможными вихрями, которые возникают на фронте ударной волны, имеем

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} \approx \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} \approx \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (21.28)$$

Покажем теперь, что из дифференциальных уравнений движения газа вытекают оценки, совпадающие и не противоречащие

данным выше. Условие неизменяемости массы жидкой частицы можно записать в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} = 0. \quad (21.29)$$

Обозначим отношения производных давления p к производным плотности ρ через c_x^2 , c_y^2 , c_z^2 :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c_x^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = c_y^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = c_z^2 \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (21.30)$$

Тогда, очевидно, величины c_x , c_y , c_z будут порядка местной скорости звука частицы на фронте волны:

$$c_x \approx c_y \approx c_z \approx c_1 = \sqrt{\frac{kp_1}{\rho_1}} \approx D. \quad (21.31)$$

Уравнения движения теперь запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -c_x^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -c_y^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial y}, \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -c_z^2 \frac{\partial \ln \rho}{\partial z}. \end{aligned} \quad (21.32)$$

Внося отсюда производные $\ln \rho$ в (21.29), получим

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{v_x^2}{c_x^2}\right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(1 - \frac{v_y^2}{c_y^2}\right) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(1 - \frac{v_z^2}{c_z^2}\right) \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= v_x v_y \left(\frac{1}{c_x^2} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{c_y^2} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + v_y v_z \left(\frac{1}{c_y^2} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \\ &+ v_z v_x \left(\frac{1}{c_z^2} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{1}{c_x^2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (21.33)$$

Поскольку

$$\frac{v_x^2}{c_x^2} \approx \frac{U^2}{D^2} \approx \frac{1}{(\epsilon + 1/M)^2} \gg 1,$$

единицу в скобках первого слагаемого следует отбросить, соблюдая точность $\epsilon^2 + 1/M^2$.

А это значит, что следует отбросить первое слагаемое в (21.29), т. е. с такой же степенью точности в уравнении сохранения мас-

сы считать $v_x = U$ постоянной. Все остальные слагаемые в (21.33) будут одного порядка, а именно U/a .

Таким образом, уравнение сохранения массы записывается в виде

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (21.34)$$

и означает, что масса газа, заключенная между двумя плоскостями yz , движущимися со скоростью U , остается неизменной с точностью $\varepsilon^2 + 1/M^2$ сравнительно с единицей, а следовательно, и давление p определяется с такой же степенью точности только через перемещения частиц, параллельные осям y и z . Отсюда вытекает также, что градиент давления вдоль оси x должен быть малым сравнительно с градиентом по осям y и z . И действительно, применяя оценки (21.27) к уравнениям (21.32), мы видим, что левая часть первого уравнения содержит величины порядка малости $\varepsilon + 1/M$ сравнительно с величинами второго и третьего уравнений.

Оценки (21.28) позволяют найти интеграл уравнений (21.32) по порядку величин

$$v_x^2 - A \approx p/\rho + v_y^2 + v_z^2, \quad A = \text{const.} \quad (21.35)$$

Применяя это соотношение к границе тела и фронту ударной волны, на основании (21.31) и (21.17) получим

$$v_x^2 - U^2 \approx (\varepsilon^2 + 1/M^2) U^2, \quad (21.36)$$

откуда ясно, что оценки, вытекающие из всех основных уравнений, граничных условий и условий на фронте волны, совпадают и с точностью $\varepsilon^2 + 1/M^2$ определяются формулами (21.27) и (21.28).

Второе и третье уравнения (21.32) теперь не зависят от v_x :

$$\begin{aligned} U \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ U \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (21.37)$$

Вместе с граничным условием (21.21) и условиями (21.13), (21.14) и (21.22) на фронте волны система уравнений (21.34) и (21.37) доказывает закон плоских сечений при установившемся движении.

После того как найдены v_y , v_z , p , первое уравнение (21.32) позволяет найти скорость v_x в различных сечениях. Однако в этом уже нет никакой необходимости.

Легко видеть, что в случае неустановившегося движения тела закон плоских сечений будет иметь место в том случае, если на пути порядка размера тела a его продольная скорость изменится на величину порядка не более $\varepsilon^2 U$, а поперечные скорости будут

порядка не более εU . Применительно к ракетам, снарядам и самолетам при $M^2 \gg 1$ эти требования не накладывают ограничений на движение. Доказательство вытекает из того, что при движении тела через неподвижную в пространстве плоскость, перпендикулярную оси x , переход от установившегося движения к неустановившемуся с точки зрения явлений, происходящих в этой плоскости, эквивалентен замене одного тела «тонкости ε » другим той же степени тонкости.

Новая постановка задач сверхзвуковой аэродинамики. Необходимо теперь отвлечься от обычного эйлера представления об обтекании тела потоком и рассмотреть явления, происходящие в неподвижной в пространстве плоскости x_0 , выбранной при $t=0$ у носика тела и перпендикулярной вектору скорости какой-нибудь точки тела в этот момент. При проникновении тела через эту плоскость частицы газа получают движения, не выходящие из плоскости x_0 . В момент времени t в плоскости x_0 будет находиться сечение тела, расположенное на расстоянии $\xi = U_0 t$ от носика, причем U_0 есть скорость U при $t=0$.

Уравнение контура фигуры $f(y, z, t)$, образуемой телом в плоскости x_0 , следовательно, известно. В случае неустановившегося движения снаряда, например, это будет расширяющаяся и перемещающаяся окружность. Если снаряд имеет оперение, то на этой окружности в некоторый момент времени появятся сначала радиальные линии, которые затем будут развиваться и перемещаться вместе с ней, и т. д.

Обозначим индексами y, z и t частные производные функции $f = f(y, z, t)$. Направление нормали к контуру определяется направляющими косинусами:

$$\cos(vy) = \frac{f_y}{\pm \sqrt{f_y^2 + f_z^2}}, \quad \cos(vz) = \frac{f_z}{\pm \sqrt{f_y^2 + f_z^2}}, \quad (21.38)$$

причем скорость расширения контура по нормали в любой точке будет

$$v = - \frac{f_t}{\pm \sqrt{f_z^2 + f_y^2}}. \quad (21.39)$$

Граничное условие, означающее непроницаемость контура:

$$v_y \cos(vy) + v_z \cos(vz) = v \text{ или } v_y f_y + v_z f_z = -f_t. \quad (21.40)$$

Вокруг контура f в плоскости x_0 будет распространяться ударная волна со скоростью D по нормали к фронту. В первое время контур фронта будет подобен контуру f .

Если v_1 есть нормаль к фронту в плоскости x_0 , то условия на нем принимают вид

$$v_y \cos(v_1 z) - v_z \cos(v, y) = 0, \quad \sigma = \frac{p_1}{p_0},$$

$$v_y^2 + v_z^2 = \frac{2c_0^2}{k} \frac{(\sigma - 1)^2}{(k - 1)\sigma + k - 1}, \quad (21.41)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(k + 1)\sigma + k - 1}{(k - 1)\sigma + k + 1}, \quad D = c_0 \sqrt{1 + \frac{k + 1}{2k}(\sigma - 1)}.$$

Если через (y_0, z_0) обозначим начальные координаты (при $t=0$) какой-нибудь частицы газа, то энтропия ее после прохождения фронта ударной волны будет постоянна, так что $\sigma = \sigma(y_0, z_0)$, поэтому в любой точке плоскости x_0

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} \sigma \left[\frac{k + 1 + (k - 1)\sigma}{(k + 1)\sigma + k - 1} \right]^k. \quad (21.42)$$

Уравнения движения и сохранения массы можно написать либо в координатах Эйлера, выбранных в плоскости x_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) &= 0, \end{aligned} \quad (21.43)$$

либо в переменных Лагранжа (y_0, z_0)

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial p}{\partial y_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0} \frac{\partial p}{\partial z_0}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial p}{\partial z_0} + \frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial p}{\partial y_0}, \\ \rho_0 &= \rho \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} \right). \end{aligned} \quad (21.44)$$

В последнем случае текущие координаты частиц выражаются через компоненты их перемещений u_y, u_z :

$$y = y_0 + u_y(y_0, z_0, t), \quad z = z_0 + u_z(y_0, z_0, t). \quad (21.45)$$

Можно доказать, что для тел типа крыла, оперения и рулей, поверхность которых простирается по осям x и y и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos(vx)}{\partial z} &\lesssim \frac{\partial \cos(vx)}{\partial x} \approx \varepsilon \frac{\partial \cos(vx)}{\partial y} \approx \frac{\varepsilon}{a}, \\ \frac{\partial \cos(vz)}{\partial z} &\lesssim \frac{\partial \cos(vz)}{\partial x} \approx \varepsilon \frac{\partial \cos(vz)}{\partial y} \approx \frac{\cos(vz)}{a} \lesssim \frac{\varepsilon}{a}, \end{aligned} \quad (21.46)$$

скорость частиц газа вдоль оси z будет малой порядка ε сравнительно с v_y и закон плоских сечений имеет место в направлении оси z с не меньшей, чем в направлении оси x , степенью точности. Граничное условие (21.40) принимает наиболее простой вид:

$$v_y = v(t). \quad (21.47)$$

Условие на фронте ударной волны может быть записано в форме

$$v_y = c_0 \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\sigma - 1}{\sqrt{(k+1)\sigma + k - 1}}, \quad (21.48)$$

причем выражения σ , ρ_1/ρ_0 и D остаются прежними (21.41), но энтропия уже может рассматриваться лишь как функция y_0 , $\sigma = \sigma(y_0)$.

Уравнения (21.43) сводятся к двум в форме Эйлера

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0, \quad (21.49)$$

или в форме Лагранжа

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial y_0}, \quad \rho_0 = \rho \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad (21.50)$$

причем ρ и p по-прежнему связаны соотношением (21.42).

Таким образом, задача расчета крыла при установившемся и неустановившемся движениях сведена к простейшей задаче о движении поршня в трубе постоянного сечения, причем поршень движется по заданному закону (21.47). Это значит, что если перед несущей поверхностью мысленно выделить столбик воздуха, перпендикулярный размаху и вектору скорости какой-нибудь точки поверхности, то при разрезании его поверхностью частицы в нем совершают лишь продольные (вдоль оси y) движения. На краю размаха поверхности происходит нарушение теоремы о поршне, и газ перетекает с нижней поверхности на верхнюю. Это явление подчиняется уравнениям (21.43). Однако с точностью

$$\varepsilon^2 + 1/M^2 \quad (21.51)$$

сравнительно с единицей им можно пренебречь во всех тех случаях, когда отношение квадрата концевой хорды a_0 к удвоенной площади поверхности в плане порядка не больше $\varepsilon + 1/M$:

$$\frac{a_k^2}{2F} \lesssim \varepsilon + \frac{1}{M}. \quad (21.52)$$

Действительно, площадь «треугольника», в котором произойдут указанные возмущения, при этом будет порядка не более (21.51)' от площади F , и поэтому учет возмущений уже нецелесообразен. Однако даже и для квадратного в плане крыла (руля) пренебрежение краевым эффектом дает ошибку порядка не более ε сравнительно с единицей, т. е. порядка угла атаки в процентах от радиана.

Мы переходим к некоторым приложениям закона плоских сечений, к задачам, встречающимся в технике.

Линеаризованная теория несущей поверхности. В тех случаях, когда при $M^2 \gg 1$ параметр $\varepsilon = \varepsilon U/c_0 < 1$ оказывается все же малым за счет угла атаки или толщины профиля несущей поверхности, энтропию газа можно считать постоянной.

Уравнение (21.50) вместе с условием

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k = 1 + k \frac{p - p_0}{p_0}, \quad (21.53)$$

если предполагать малость v_y/c_0 , имеет решение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_y = v \left(t - \frac{y_0}{c_0} \right), \quad (21.54)$$

где функция $v(t)$ представляет закон движения поршня, т. е. скорость, с которой в неподвижном столбике разрезающая его поверхность сжимает газ; эта скорость для любой точки поверхности равна проекции вектора абсолютной скорости элемента поверхности на нормаль к этому элементу.

Поскольку согласно (21.54)

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = \frac{\partial}{\partial y_0} \int v \left(t - \frac{y_0}{c_0} \right) dt = -\frac{1}{c_0} v \left(t - \frac{y_0}{c_0} \right) + 1,$$

то из (21.50) и (21.53) получаем выражение давления

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{k}{c_0} v \left(t - \frac{y_0}{c_0} \right),$$

и, в частности, на поверхности тела избыточное давление равно

$$p - p_0 = \Delta p = k p_0 \frac{v(t)}{c_0}. \quad (21.55)$$

Итак, избыточное давление на любой площадке поверхности согласно линеаризованной теории равно давлению в неподвижном воздухе, умноженному на показатель политропы k и умноженному на отношение нормальной составляющей вектора скорости этой площадки к скорости звука в невозмущенном воздухе.

§ 22. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Во всех деформируемых и покоящихся средах в зависимости от их электромагнитных свойств наблюдаются более или менее сильные влияния электромагнитного поля на движение и макроскопическое состояние сред и обратное влияние движения сред на электромагнитные поля. Объекты, реализующие макровзаимодействие электромагнитного поля и среды, — это электрические заряды среды и проходящие в ней токи, и потому взаимодействия существенно различны в средах — проводниках, полупроводниках и диэлектриках. На скрепленный со средой электрический заряд объемной плотности ρ_e' в электрическом поле напряженности E' в покое действует сила $\rho_e'E'$, которую он и передает единице объема среды; ток объемной плотности j' , проходящий в той же точке среды, при наличии магнитного поля с вектором магнитной индукции B' в этом случае (в покое) сообщает единице объема среды силу $j' \times B'/c$.

Если тот же единичный объем среды движется со скоростью V относительно некоторой системы координат наблюдателя (эйлерово пространство), то движение заряда представляет ток $\rho_e'V$; векторы j, E, B, \dots , определенные в этом пространстве, отличаются от j', E', B', \dots в той же физической точке среды, т. е. по их природе векторы электромагнитного поля j, E, B, \dots при переходе от неподвижной к подвижной системе координат преобразуются по особым законам, отличным от преобразований векторов, ранее рассмотренных. Понятно, что все преобразования в системах координат (декартовых, криволинейных), неподвижных одна относительно другой, сохраняются для j, E, B, \dots такими же, как и для обычных векторов и тензоров. Эти особенности электромагнитных полей связаны с различием физических законов классической механики и теории относительности, определяемым параметром $\beta = v/c$ (отношение скорости движения к скорости света).

В классической механике, а следовательно, и в МСС все уравнения ковариантны (не изменяются) относительно преобразований Галилея: если вместо некоторого пространства наблюдателя с радиус-вектором x выбрать другое (x'), совпадающее с ним при $t=t_0$ и движущееся поступательно с постоянной скоростью V_0 , то для движущейся физической точки, определенной лагранжевой координатой x при $t=t_0$ и при $t>t_0$, одинаковой в обоих пространствах ($x' \equiv x$, так как x , по существу, есть «номер» точки), закон движения будет иметь вид

$$t' = t, \quad x' \equiv x' (x, t') = x(x, t) - V_0 t. \quad (22.1)$$

Здесь очевидна тождественность отрезков времени $dt' = dt$ и физических отрезков в обоих пространствах:

$$dx' \equiv \frac{\partial x'}{\partial x} dx = \frac{\partial x}{\partial x} dx.$$

Уравнения электродинамики ковариантны относительно более общих преобразований Лоренца, при которых вместо сохранения времени и длины в трехмерном евклидовом пространстве

$$dt'^2 = dt^2, \quad dx'^2 = dx^2 \quad (22.1')$$

сохраняется квадрат «длины» ds_4^2 в четырехмерном пространстве — времени Минковского:

$$ds_4^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \quad (22.2)$$

Опыт показал, что (22.2) совпадает с (22.1') при $\beta = V_0/c \ll 1$.

Скорости, обычно рассматриваемые в МСС, малы сравнительно с c , даже если они порядка сотен и тысяч километров в секунду. Но учет электромагнитных сил и мощностей в МСС требует правильного выражения векторов электромагнитного поля.

Инерциальной декартовой подвижной системой координат (ДПС) в точке $x = \text{const}$ (точка x пространства наблюдателя) в момент t_1 назовем декартову систему, которая поступательно движется с местной скоростью $v(x, t_1) = V(x, t_1)$ в течение малого интервала времени $t_1 - \Delta t \leq t \leq t_1 + \Delta t$; окрестность точки x в этот период с точностью до малых высшего порядка (и поворотов) остается «неподвижной» в ДПС. Местную систему координат, неподвижную в пространстве наблюдателя и совпадающую в момент $t = t_1$ с ДПС, назовем ДЭС (декартова эйлерова система). ДПС иногда называют сопутствующей системой (относительно ДЭС она движется со скоростью $v(x, t)$). Преобразование векторов электромагнитного поля от ДПС к ДЭС и называется преобразованием этих векторов от лагранжевой системы к системе пространства наблюдателя, от их значения в «покое» к значениям в системе наблюдателя.

Электромагнитное поле в пустоте вполне характеризуется напряженностью E электрического и напряженностью H магнитного полей, иначе — электрическим E и магнитным H векторами, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{div } H = 0, \quad (22.3)$$

$$\text{rot } H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \text{div } E = 0.$$

Из первой пары уравнений (22.3) получаем выражения H, E через векторный и скалярный потенциалы $H = \text{rot } \varphi$, $E = -c^{-1} \partial \varphi / \partial t + \text{grad } \varphi$. Полагая $\text{div } \varphi = c^{-1} \partial \varphi / \partial t$, из оставшихся уравнений (22.3) находим волновые уравнения для потенциалов φ и φ :

$$c^2 \Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial t^2, \quad c^2 \Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial t^2; \quad (22.4)$$

из них следует, что в пустоте распространяются электромагнитные (Э-М) волны со скоростью света. Например, уравнения (22.4) имеют решение в виде бегущих волн $\varphi(\xi)$, $\varphi(\xi) = -k\varphi(\xi)$, $\xi = kx - ct$, где k — постоянный вектор, $\varphi(\xi)$ — произвольный вектор, причем \mathbf{H} и \mathbf{E} ортогональны и равны соответственно $\mathbf{H} = \varphi'(\xi) \times k$, $\mathbf{E} = \varphi' - k(k\varphi)$.

Наиболее естественное для МСС представление о взаимодействии сплошной среды с Э-М полем в духе идей статистической механики (§ 1, 2) дает электронная теория Лоренца, весьма неплохо объясняющая множество Э-М эффектов в деформируемых средах (см. с. 269).

В результате усреднения уравнений микрополя (22.26) возникают векторы электрической индукции \mathbf{D} и магнитной индукции \mathbf{B} , как бы уточняющие значения \mathbf{E} и \mathbf{H} в вакууме за счет \mathcal{P} и \mathcal{M} среды:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathcal{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathcal{M}, \quad (22.5)$$

они называются векторами электрической поляризации и намагниченности соответственно. В общем случае проводящих, поляризуемых и намагничивающихся сред уравнения Максвелла во всех системах координат имеют одинаковый вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Здесь \mathbf{j} — объемная плотность возникающего в среде электрического тока, ρ_e — средняя плотность электрических зарядов.

Система уравнений Максвелла (22.6) содержит лишь семь уравнений, так как уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ является следствием первого (векторного) уравнения (22.6) при соответствующих начальных данных. Для неподвижных проводящих сред система уравнений (22.6) становится замкнутой, если известны функциональные зависимости векторов \mathcal{P} , \mathcal{M} или электрической и магнитной индукции \mathbf{D} , \mathbf{B} и тока \mathbf{j} от напряженностей \mathbf{E} , \mathbf{H} электрического и магнитного полей: при некоторых начальных и граничных условиях векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{j} вполне определяются.

Из (22.6) следует закон сохранения заряда, выражение потока индукции \mathbf{D} через замкнутую поверхность и закон сохранения Э-М энергии в фиксированном объеме пространства наблюдателя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{D} \mathbf{n} d\Sigma = 4\pi \int_V \rho_e dV, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV + \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \mathbf{j} \mathbf{E} \right) dV &= - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \mathbf{n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Здесь \mathbf{S} — вектор Умова—Пойнтинга потока Э-М энергии в пространстве

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (22.8)$$

который выражает в (22.7) приток Э-М энергии в V через Σ .

Соотношения (22.3)—(22.6) ковариантны (сохраняют вид) относительно преобразований Лоренца, если все величины (\mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{j} , ρ_e) выражены в рассматриваемой системе координат.

Векторы электромагнитного поля в местной мгновенной ДПС можно выразить через векторы в едином для всей среды пространстве наблюдателя, т. е. в ДЭС.

Отметим штрихом сверху все величины, определенные в ДПС, и во всех уравнениях (22.3)—(22.6) всем величинам припишем штрихи. Эти соотношения отражают ковариантные соотношения электродинамики в пространстве—времени Минковского на трехмерное пространство и время в системе ДПС, которая со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ движется относительно ДЭС. Без штрихов обозначим преобразованные к ДЭС величины. Тогда уравнения (22.3)—(22.6) сохраняют свой вид, так как они ковариантны относительно преобразований Лоренца. Преобразования векторов \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , \mathbf{D}' , \mathbf{B}' , \mathbf{j}' и плотности ρ_e' приводим без доказательства [54]:

$$\gamma \mathbf{E} = \mathbf{E}' - (1 - \gamma)(\mathbf{E}' \cdot \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} + \beta \mathbf{B}' \times \boldsymbol{\xi}, \quad (22.9)$$

$$\gamma \mathbf{H} = \mathbf{H}' - (1 - \gamma)(\mathbf{H}' \cdot \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} - \beta \mathbf{D}' \times \boldsymbol{\xi}, \quad (22.10)$$

$$\gamma \rho_e = \rho_e' + \beta \frac{1}{c} \mathbf{j}' \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v} = \mathbf{j}' - (1 - \gamma)(\mathbf{j}' \cdot \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}, \quad (22.11)$$

где $\beta \equiv \frac{v}{c}$, $\gamma \equiv \sqrt{1 - \beta^2}$, $\boldsymbol{\xi} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v}$.

Преобразования для \mathbf{D} и \mathbf{B} получаются из (22.9), (22.10) заменой $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$, $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}$. Выражения \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , ... через \mathbf{E} , \mathbf{H} , ... получаются из (22.9), (22.10) простым перенесением штрихов в левые стороны и изменением знака величины β .

Простейшие материальные соотношения (как и уравнения состояния МСС) выражаются в ДПС для начально изотропных также в отношении поляризации и намагничивания сред. Законы поляризации, намагничивания недеформирующейся среды и закон Ома в ДПС при этом имеют вид

$$4\pi \mathcal{P}' = (\epsilon - 1) \mathbf{E}' \quad \text{или} \quad \mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}', \quad (22.12)$$

$$4\pi \mathcal{M}' = (\mu - 1) \mathbf{H}' \quad \text{или} \quad \mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \quad (22.13)$$

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'. \quad (22.14)$$

Экспериментально определяемые для разных сред коэффициенты поляризации ($\epsilon \geq 1$), магнитной проницаемости (μ может быть

больше или меньше единицы) и проводимости (σ) могут существенно зависеть от плотности вещества (ρ) и температуры (T). Для анизотропной среды коэффициенты ϵ , μ , σ представляются симметричными матрицами второго ранга. Предположение о независимости коэффициентов от \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , т. е. линейности этих связей, лежит в основе классической электродинамики. Однако связь между \mathbf{M}' и \mathbf{H}' для ферромагнетиков имеет малую область линейности и напоминает кривую растяжения с разгрузками образца в упругопластической области (рис. 20.1). Для вакуума $\epsilon=1$, $\mu=1$. После подстановки \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , ..., \mathbf{j}' , ρ_e' в (22.12) — (22.14) получаем выражения материальных соотношений

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \beta \boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \beta \boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{E} - \mu \mathbf{D}), \quad \beta \boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad (22.15)$$

$$\mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v} = \frac{\gamma \sigma}{1 - \mu \epsilon} (\mathbf{E} - \mu \mathbf{D}) = \frac{\sigma}{\gamma} [\mathbf{E} + \beta \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B} - \beta^2 (\mathbf{E} \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}]. \quad (22.16)$$

В пространстве наблюдателя эти соотношения и дополняются к уравнениям (22.6); при заданной скорости движения различных точек среды $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и параметрах ϵ , μ , σ внутри области определения система (22.6), (22.15), (22.16) для векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} замкнута.

Отбрасывая в (22.15), (22.16) малые порядка β^2 сравнительно с единицей, получаем с большой точностью материальные соотношения в ДЭС в виде (22.12) — (22.14) при замене

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v},$$

$$\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}, \quad \mathbf{D}' \rightarrow \mathbf{D} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c}, \quad (22.17)$$

$$\mathbf{H}' \rightarrow \mathbf{H} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{D}}{c}, \quad \mathbf{B}' \rightarrow \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}.$$

Здесь ρ_e' , \mathbf{j}' — плотность заряда и тока в ДПС, т. е. в точке (\mathbf{x}, t) в системе, движущейся вместе с физической частицей среды. Как видим, в выражении закона Ома (22.17) при отсутствии собственных зарядов ($\rho_e' = 0$) слагаемое $\rho_e \mathbf{v}$ в выражении тока должно быть отброшено с ошибкой β^2 сравнительно с единицей.

На единицу объема среды со стороны поля действует объемная сила $\rho \mathbf{F}_3$ (пондеромоторная сила) и сообщается мощность Q_3 , имеющие в пространстве наблюдателя выражения

$$\rho \mathbf{F}_3 = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{f}_\Delta, \quad Q_3 = \mathbf{j} \mathbf{E} + Q_\Delta; \quad (22.18)$$

действует также вектор-момент $\rho \mathbf{M}_3$. Величины $\rho \mathbf{M}_3$, \mathbf{f}_Δ , Q_Δ отражают специфические Э-М свойства среды.

Если материальные соотношения принять в виде (22.10) — (22.14), (22.17), считая μ , ϵ зависящими от координат (т. е. температуры и плотности), то, обозначая $f_\Delta = f_{\mu\epsilon}$, $Q_\Delta = Q_{\mu\epsilon}$, получим величины $f_{\mu\epsilon}$, $Q_{\mu\epsilon}$, обращающиеся в ноль, если параметры ϵ , μ — скаляры и не зависят от x , t ,

$$8\pi f_\Delta = \mathbf{E} \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta x} - \mathbf{D} \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta x} + \mathbf{H} \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta x} - \mathbf{B} \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta x}, \quad (22.19)$$

$$8\pi Q_\Delta = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

где обозначен оператор $\delta/\delta x$, который в декартовых координатах (репере e_i) определяет для любых векторов \mathbf{A} , \mathbf{C} вектор

$$\mathbf{A} \frac{\delta \mathbf{C}}{\delta x} = \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_i} \right) e_i. \quad (22.19)'$$

Разность между полной мощностью Q_s , сообщаемой полем единице объема среды, и мощностью пондеромоторной силы $\rho \mathbf{F}_s \mathbf{v}$ при отбрасывании величины $\beta^2 \mathbf{H}^2$ сравнительно с \mathbf{E}^2 равна

$$\Delta Q_s = \sigma \mathbf{E} \left(\mathbf{E} + 2\mu \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) - \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}), \quad (22.20)$$

где d/dt — полная производная по времени. Это выражение получается на основании (22.17) — (22.19) и тождества

$$\left(\mathbf{A} \frac{\delta \mathbf{C}}{\delta x} \right) \mathbf{v} = \mathbf{A} \left(\frac{d\mathbf{C}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} - v_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (22.21)$$

Первое слагаемое правой части (22.20) в ДПС равно $\sigma \mathbf{E}^2 = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2$ и следовательно, представляет джоулево тепло, возникающее за счет электрического сопротивления $1/\sigma$; второе — совершаемую полем работу; последнее представляет полный дифференциал и может быть отнесено к приращению внутренней энергии единицы объема.

Необходимо отметить, что при преобразованиях Лоренца скорость \mathbf{v} считается постоянной, преобразуются время, координаты и функции поля. Поэтому при подстановке (22.17) в уравнения Максвелла, в вычислениях (22.18), (22.20) скорость \mathbf{v} , являющаяся функцией координат и времени, не должна дифференцироваться по x , t . Это относится ко всем дифференциальным операторам над электромагнитными скалярами и векторами, содержащими множители ξ или \mathbf{v} .

Уравнения Максвелла (22.6) сохраняют свой вид в ДПС, если в них внести значения (22.9), причем \mathbf{v} и $\xi = \mathbf{v}/v$ не дифференцировать по x , t :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}, \quad \operatorname{div}' \mathbf{B}' = 0; \\ \operatorname{rot}' \mathbf{H}' &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'}, \quad \operatorname{div}' \mathbf{D}' = 4\pi\rho_e'. \end{aligned} \quad (22.22)$$

Здесь rot' , div' означают операторы, выраженные в ДПС. Определенную трудность вносит входящее в (22.22) местное время t' , зависящее от x , t . Строго говоря, некорректная замена $\partial/\partial t'$ на $\partial/\gamma\partial t$ совпадает с $t'=t$ с точностью до малых порядка β^2 (t — универсальное время МСС); полное преобразование Лоренца от ДПС к ДЭС возвращает постановку задачи к пространству наблюдателя.

При малых объемных моментах $\rho\mathbf{M}$, тензор напряжений симметричен. Уравнения движения и сохранения массы сплошной среды в эйлеровых координатах (10.16)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} \mathbf{e}_i + \rho \mathbf{X}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (22.23)$$

или, соответственно, лагранжевых (10.11) содержат объемные силы $\rho\mathbf{X}$ и $\rho_0\mathbf{X}'$

$$\rho\mathbf{X} = \rho\mathbf{X}_g + \rho\mathbf{F}_s, \quad \rho_0\mathbf{X}' = \rho_0\mathbf{X}_g + A\rho\mathbf{F}_s'. \quad (22.24)$$

Первые слагаемые — обычные заданные массовые силы (тяжести и др.), вторые же представляют пондеромоторные силы электромагнитного поля. Например, вектор $\rho\mathbf{F}_s$ дан формулами (22.18), и компоненты его в декартовых координатах эйлерова пространства имеют выражения через \mathbf{E} , \mathbf{H}

$$\begin{aligned} \rho F_s^i &= \rho \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{e}_i = \rho_e E_i + \frac{c_i}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \\ &- \frac{1}{8\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^i} - \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^i} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^i} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (22.25)$$

Для постановки и решения задач МСС с учетом Э-М поля существенно знание выражений объемных плотностей пондеромоторных силы $\rho\mathbf{F}_s$, момента \mathbf{M}_s и мощности Q_s . Формулы (22.18) дают выражения главных частей силы $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}/c)$ и мощности $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$. Добавочные же члены в виде (22.19) отражают для Э-М-поляризуемых тел только влияние зависимости (μ, ϵ) -констант от координат и времени, т. е., например от плотности и температуры; для этих эффектов имеются и другие формулы.

Вопрос о выражении пондеромоторных сил (включая мощности, моменты, бимоменты и др.) в электродинамике сплошных движущихся и деформирующихся при этом тел в общем случае не решен. В МСС заслуживает особого внимания подход с позиций электронной теории Лоренца.

Э-М свойства вещества (среды) в электронной теории Лоренца представляются такими же, как если бы оно состояло только

из дискретных положительных и отрицательных зарядов плотности ρ_e , взаимодействующих между собой и создаваемым ими полем в вакууме. Электрический ток представляется только конвективным и равен $\rho_e \mathbf{v}_e$, где \mathbf{v}_e — истинная скорость движения заряда.

Истинное Э-М поле (\mathbf{e}, \mathbf{h}) такой системы удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad (22.26)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho_e \mathbf{v}_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \rho_e.$$

На заряд ρ_e в этом поле действует сила Лоренца:

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{e} + \frac{1}{c} \rho_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{h}. \quad (22.27)$$

Микромир зарядов ρ_e и токов $\rho_e \mathbf{v}$ в веществе образует сложную статистическую систему в пределах макрообъема среды dV , в макро бесконечно малом интервале времени dt . Его рассматривают как систему S_N большого числа взаимодействующих частиц (§ 1, 2), в которой пренебрегают усложнениями, связанными с квантовомеханическими и релятивистскими эффектами. Усреднения соотношений (22.26), (22.27) по малым макрообъему dV и времени dt с учетом сложной системы точечных зарядов ρ_e и токов $\rho_e \mathbf{v}$ представляют сложную задачу. Заряды могут образовывать диполи и мультиполи и при усреднении приводят к понятию вектора электрической поляризации \mathcal{P} . Круговые замкнутые токи вместе с ними приводят к понятию вектора магнитной поляризации или намагниченности \mathcal{M} .

Для *релятивистски малых скоростей* ($\beta = v/c \ll 1$) в рамках классической статистической механики А. Эрингеном и Ж. Можé на базе электронной теории Лоренца развита теория пондеромоторных сил и мощностей [10; 11]. Каждый точечный заряд в движущемся со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ с вихрем $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ лагранжевом базисе (малом объеме dV) имеет переносную и относительную скорости; последняя состоит из регулярной составляющей под действием лоренцевой силы в поле, возникающем от всех зарядов, и нерегулярной (тепловой) от межчастичных взаимодействий. Движение каждого заряда образует столь же сложный ток. Совокупность зарядов в единице объема при осреднении дает плотность зарядов ρ_e , плотность электрических диполей, квадриполей и т. д. Токи приводятся к магнитным диполям, их совокупность вместе с током $\rho_e \mathbf{v}$ приводит к определению плотности полного тока \mathbf{j} в (22.6). Аналогично, осредняя лоренцовы силы (22.27), действующие на все заряды в единице объема, их моменты $\mathbf{r} \times \mathbf{f}_e$ и мощности $\mathbf{f}_e \mathbf{v}_e$, получают плотности объемной силы $\mathbf{f}^{(e)} \equiv \rho \mathbf{F}_e$, момента $\mathbf{m}^{(e)} \equiv \mathbf{M}$, и мощности $\omega^{(e)} \equiv Q$.

Кажущаяся столь простой реализация схемы получения основных для постановки задач МСС величин в действительности потребовала существенных уточнений и сложных вычислений. Здесь приводим лишь общие идеи и некоторые результаты работы [11].

Пространство наблюдателя имеет координатную систему ДЭС, в ней записаны уравнения (22.26). Усредненные в указанном выше смысле величины истинного Э-М поля обозначаются входящими в (22.6) символами

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{B}, \quad \langle \rho_e \rangle = \rho_e, \quad \langle \rho_e \mathbf{v}_e \rangle = \mathbf{J} \quad (22.28)$$

и потому усредненные уравнения Максвелла для микрополя совпадают с (22.6). ДПС, сопутствующая физически ориентированному (§ 10) реперу, движется относительно ДЭС со скоростью \mathbf{v} , которую следует отличать от истинных скоростей \mathbf{v}_e зарядов, входящих в (22.26); \mathbf{v} есть средняя массовая скорость «частиц физического репера» ДПС относительно репера ДЭС; $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_e'$, где $\Delta \mathbf{v}_e'$ — истинная скорость заряда в ДПС. Учитывая вихрь $\boldsymbol{\omega}$, который также представляет мгновенно некоторое макро-регулярное вращение макрочастицы ρdV , внутри которой и определены $\Delta \mathbf{v}_e'$, ясно, что можно выделить еще одно «переносное движение» со скоростью $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ относительно центра масс частицы ρdV ; следовательно,

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} + \Delta \mathbf{v}_e, \quad (22.29)$$

причем теперь $\Delta \mathbf{v}_e$ в любой системе координат (ДПС)₁, имеющей данные \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$, одинаково хаотически распределены в макрообъеме — времени (dV, dt) . Если внести выражение скорости \mathbf{v}_e (22.29) в уравнения (22.26), (22.27) и усреднить их, а также ток $\rho_e \mathbf{v}_e$, момент и мощность $\rho_e \mathbf{v}_e$, $\mathbf{r} \times \mathbf{f}_e$, $\mathbf{f}_e \mathbf{v}_e$, по (dV, dt) , станут ясны трудности вычисления выражений пондеромоторных сил через средние значения функций поля (22.28) и другие.

Усредняя силу \mathbf{f}_e (22.27) и мощность $\omega_e = \mathbf{f}_e \mathbf{v}_e$, с учетом (22.28) убеждаемся интуитивно в правильности оценки главных составляющих пондеромоторной силы $\rho \mathbf{F}_3 = \langle \mathbf{f}_e \rangle$ и мощности $Q_3 = \langle \omega_e \rangle$ в формулах (22.18).

Учитывая, что по их определению векторы поляризации \mathcal{P} и \mathcal{M} пропорциональны соответственно средним значениям моментов зарядов и токов, можно предвидеть, что если \mathcal{P} и \mathcal{M} будут малыми, то и объемной плотностью Э-М моментов можно пренебречь. В этом случае заключаем на основании условия (6.15), что тензор внутренних напряжений Коши будет симметричным. Это распространенное в МСС предположение.

Э-М векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} при переходе от ДЭС к (ДПС)₁ отмечаются двумя штрихами, преобразуются по формулам (22.17), в которых знак перехода (\rightarrow) заменяется равенством ($=$).

В окрестности движущейся частицы за малое время t декартовы координаты ДЭС связаны с мгновенными декартовыми коор-

динатами в $(\text{ДПС})_1$ соотношениями, соответствующими формуле (22.29); при $\Delta v_e = 0$ из (22.29) вытекает выражение абсолютной скорости любой точки \mathbf{r} физически ориентированного репера через его поступательную скорость \mathbf{v} и вихрь $\boldsymbol{\omega}$.

Следовательно, $(\text{ДПС})_1$ отличается от ранее рассматривавшейся ДПС учетом не только поступательного движения со скоростью \mathbf{v} , но и вращения (вихря $\boldsymbol{\omega}$). В $(\text{ДПС})_1$ найдены соотношения

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}, \quad \mathbf{B}'' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}, \quad \mathbf{H}'' = \mathbf{B}'' - \mathcal{M}'' = \mathbf{H} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{D}}{c}, \quad (22.30)$$

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{P}}{c}, \quad \mathbf{j}'' = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}.$$

Уравнения Максвелла (22.6) преобразуются в $(\text{ДПС})_1$ к другому виду

$$\text{rot } \mathbf{E}'' + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}'' = 0, \quad \text{div } \mathbf{B}'' = 0, \quad (22.31)$$

$$\text{rot } \mathbf{B}'' - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}'' = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}''^{\text{эф}}, \quad \text{div } \mathbf{D}'' = 4\pi \rho^{\text{эф}},$$

причем возник оператор, названный конвективной производной по t для векторов поля, обозначаемый $(*)$, например,

$$\dot{\mathbf{E}}'' \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{E} \quad (22.32)$$

и обозначены эффективные плотности заряда и тока

$$\rho^{\text{эф}} = \rho_e - \text{div } \mathcal{P}, \quad \mathbf{j}''^{\text{эф}} = \mathbf{j}'' + \dot{\mathcal{P}} + c \text{ rot } \mathcal{M}''. \quad (22.33)$$

Отличие (22.31) от (22.6) можно объяснять тем, что система $(\text{ДПС})_1$ вращается относительно ДПС.

В [11] приведена теорема: существуют тензор второго порядка (t^3_{ji}) и вектор \mathbf{G} , такие, что объемные плотности пондеромоторной силы ρf^3_i и момента m^3_i выражаются формулами $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$\rho f^3_i = t^3_{ji,j} - \frac{\partial G_i}{\partial t}, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

$$t^3_{ji} = -\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 - 8\pi \mathcal{M}'' \mathbf{B}) \delta_{ij} + 4\pi (\mathcal{P}_j E''_i - B_j \mathcal{M}''_i) + E_j E_i + B_j B_i; \quad (22.34)$$

$$m^3_i = \delta_{i/k} t^3_{jk} = 4\pi (\mathcal{P}_i E''_j + B_j \mathcal{M}''_i - \mathcal{P}_j E''_i - B_i \mathcal{M}''_j). \quad (22.35)$$

Как видно, новый электромагнитный тензор напряжений (t^3_{ji}) состоит из симметричного

$$E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (E^2 + B^2 - 8\pi \mathcal{M}'' \mathbf{B}) \delta_{ij} \quad (22.35)'$$

и несимметричного, зависящего от поляризаций,

$$4\pi (\mathcal{P}_j E_i - B_j \mathcal{M}_i''). \quad (22.35)''$$

Первый включает известный в электродинамике симметричный тензор Минковского. Э-М тензор (t^3_{ji}) Може—Колле является новым, отличным от известных тензоров Минковского, Эйнштейна и Абрахама; по его построению он более точно отражает физику пондеромоторных сил для различных тел.

Мощность, сообщаемая полем единице объема тела имеет выражение

$$Q_3 = \rho f^3 v + m^3 \omega + Q_{3\Delta}, \quad (22.36)$$

$$Q_{3\Delta} = \mathbf{j}'' \mathbf{E}'' + \mathbf{E}'' \mathcal{P}'' - \mathcal{M}'' \mathbf{B}'' + v_i t^3_{ji}.$$

Приведем другое тождественное с (22.34) выражение пондеромоторной силы:

$$\rho f^3 = 4\pi \rho_e \mathbf{E}'' + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} \cdot \mathcal{P}'') \times \mathbf{B} + (\mathcal{P} \text{ grad}) \mathbf{E}'' + (\mathbf{B} \text{ grad}) \mathcal{M}''. \quad (22.34)'$$

Легко заметить, что в формулах (22.18) явно выписаны слагаемые, содержащиеся в (22.36), (22.34)'.

Закон сохранения энергии имеет выражение

$$\rho \dot{U} = t^3_{ji} v_{i,j} + \mathbf{j}'' \mathbf{E}'' + \rho \mathbf{E}'' \left(\frac{1}{\rho} \mathcal{P}'' \right)' - \mathcal{M}'' \dot{\mathbf{B}}'' + Q_{3\Delta} - \text{div } \mathbf{q}, \quad (22.37)$$

где \mathbf{q} — вектор потока тепла; точка над функциями означает полную производную по времени; функции поля с двумя штрихами должны быть выражены через основные в пространстве наблюдателя по формулам (22.30); в произведениях их должны быть сохранены слагаемые, линейные относительно v/c (т. е. β).

Из выражений момента m^3 (22.35) и m (6.15) при $m = m^3 = 0$ получаем полные условия симметрии тензора напряжений Коши. Это будет, например, при коллинеарности векторов $\mathcal{P}_c \mathbf{E}''$ и $\mathcal{M}_c \mathbf{B}''$. Несимметрией тензора Коши можно пренебречь, если $|m'|$ мал сравнительно с действующими в среде основными напряжениями, т. е. если $\max |t^3_{ij}| < \max |\sigma_{ij}|$.

В диэлектриках, обладающих пьезоэлектрическими свойствами (у большинства кристаллов, в пьезокерамиках), наблюдаются *линейные связи* между \tilde{S} , $\tilde{\epsilon}$, E , D . Пренебрегая тепловыми и магнитными эффектами и считая, что токи отсутствуют, а заряды сводятся только к диполям (следовательно, $\rho_e' = 0$), уравнения Максвелла для векторов D' , E' $\text{rot } E' = 0$, $\text{div } D' = 0$ приведем к виду

$$E' = -\text{grad } \varphi, \quad \text{div } D' = 0. \quad (22.38)$$

Они представляют уравнения электростатики для потенциала φ .

При малых деформациях ($\rho = \rho_0$), изотермических процессах, в предположении отсутствия потерь ω^* , q объемную плотность внутренней энергии $\rho_0 u = U$ следует считать функцией тензора деформации и вектора поляризации \mathcal{P}' или D' . Работа внутренних сил равна

$$\delta' A = \tilde{S} d\tilde{\epsilon} + E' dD'. \quad (22.39)$$

Из закона сохранения энергии

$$dU(\tilde{\epsilon}, D') = \delta' A \quad (22.40)$$

получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad E_i' = \frac{\partial U}{\partial D_i'}. \quad (22.40)'$$

Ограничиваясь квадратичной формой в разложении $U(\tilde{\epsilon}, D')$, учитывая для анизотропных тел выражение закона Гука, заключаем, что ковариантность разложения требует существования еще двух групп констант вещества: двухиндексных — для сверток компонент вектора E' и трехиндексных — для сверток компонент ϵ_{ij} и E_k . В результате

$$2U = E_{ijmn} \epsilon_{ij} \epsilon_{mn} + E_{ij}^3 D_i' D_j' + E_{ij,k} \epsilon_{ij} D_k'. \quad (22.41)$$

При этом упругие модули обладают известной симметрией (§ 16) и второе слагаемое (22.41) представляет положительно определенную квадратичную форму с матрицей диэлектрической проницаемости (E_{ij}^3) , также симметричной.

Подставляя (22.41) в (22.40)', находим уравнения связи \tilde{S} с $\tilde{\epsilon}$ и D' , отражающие пьезоэлектрический эффект

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn} \epsilon_{mn} + E_{ij,k} D_k', \quad D_k' = E_{kj}^3 D_j' + E_{ji,k} \epsilon_{ij}. \quad (22.42)$$

Следовательно, $\hat{\epsilon} = (E_{kj}^3)$ — матрица диэлектрической проницаемости; $(E_{ij,k})$ представляет пьезоэлектрические модули. Они симметричны по ij , $E_{ij,k} = E_{ji,k}$, отличны от нуля у пьезокерамики,

пьезокварца и множества других кристаллов и обеспечивают существование *прямого и обратного пьезоэлектрических эффектов* (если $\tilde{\epsilon} \neq 0$, то $\mathbf{D}' \neq 0$, и наоборот).

Для малых деформаций, перемещений и скоростей движения диэлектриков системы уравнений механики

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (22.43')$$

электростатики (22.38) вместе с уравнениями состояния (22.42) представляют замкнутую систему четырех уравнений для вектора \mathbf{u} (u_i , $i=1, 2, 3$) и электрического потенциала φ , приводящуюся к виду

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - E_{ijklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_k} + E_{ij \cdot k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} &= 0 \quad (i=1, 2, 3), \\ E_{ij \cdot k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + E_{jk}^{\circ} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (22.43)$$

Граничные условия для напряжений и перемещений, а также для потенциала φ могут быть взяты обычными в теории упругости и электростатике. Например, на всей поверхности Σ тела можно задать любые изменяющиеся с частотой ω силы, а два изолированных ее участка Σ_1 , Σ_2 покрыть проводящей пленкой. Тогда с частотой ω на Σ_1 , Σ_2 будут возникать потенциалы $\varphi_1 \neq \varphi_2$, позволяющие получать ток.

Ввиду отсутствия зарядов и слабости токов ($\sigma \approx 0$) в (22.43') отброшены пондеромоторные силы. Оценку возникающего магнитного поля \mathbf{H} за счет слабой нестационарности \mathbf{E}' и скорости движения $\partial \mathbf{u} / \partial t$ можно получить из неиспользованных уравнений (22.22) при уже найденных \mathbf{E}' , \mathbf{D}' :

$$\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}.$$

После этого можно дать оценку отброшенной в (22.43) пондеромоторной силы.

Другие электромагнитные эффекты получаются при иных представлениях внутренней энергии U в зависимости от \mathbf{E} , \mathbf{H} и закона Ома для металлов и полупроводников различной структуры, например представлениях ее в виде, подобном (22.41) при замене \mathbf{E} на \mathbf{H} и т. д. Закон Ома для изотропных металлов и ряда монокристаллов, например, при переменном температурном поле имеет более точный вид

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} (\mathbf{E} + \hat{\alpha}_T \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = -\hat{\Lambda} \operatorname{grad} T,$$

где $\hat{\sigma}$, $\hat{\alpha}_T$ — скалярные константы или матрицы проводимости и термоэлектрических эффектов.

До сих пор не рассматривались электромагнитные граничные условия на границе двух различных сред; механические граничные условия кинематического типа не зависят от электромагнитного поля, динамические же иногда требуют в МСС поправок, связанных с тензором натяжения Максвелла [54], который отличен от нуля даже в пустоте, что и говорит о малости этих поправок. Электромагнитные граничные условия должны быть согласованы с уравнениями Максвелла и опытом. Например, во всех средах $\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0$; выделяя около границы Σ двух сред тонкий, охватывающий обе среды слой толщиной $\delta \rightarrow 0$ и вычисляя интеграл

$$0 = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{B}' dV = \int_{\Sigma} \mathbf{B}' n d\Sigma \rightarrow \int_{\Sigma} (\mathbf{B}'_2 n - \mathbf{B}'_1 n) d\Sigma,$$

находим условия на Σ с нормалью \mathbf{n}

$$\Delta(\mathbf{B}' n) \equiv \mathbf{B}'_2 n - \mathbf{B}'_1 n = 0, \quad (22.44)$$

т.е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции на Σ непрерывна. Аналогично из (22.6), (22.7) при конечных ρ_e , $\partial \rho_e / \partial t$ следуют два эквивалентных друг другу условия

$$\Delta(\mathbf{D}' n) = 0, \quad \Delta(\mathbf{j}' n) = 0, \quad (22.45)$$

причем для диэлектриков берется первое, для проводников — второе, а для их комбинации — любое из (22.45). Применяя формулу Стокса к интегралу по части того же объема, опирающейся на малый элемент $\Delta \Sigma$ площади поверхности Σ , ограниченной малым контуром Δl , от $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, на основании уравнений Максвелла получим при некоторых несущественных ограничениях на $\partial \mathbf{B} / \partial t$, $\partial \mathbf{D} / \partial t$, \mathbf{j} условия непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{H} и \mathbf{E} :

$$\Delta(\mathbf{H}' \boldsymbol{\tau}) = 0, \quad \Delta(\mathbf{E}' \boldsymbol{\tau}) = 0, \quad (22.46)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — любой тангенциальный вектор на Σ ($\boldsymbol{\tau} n = 0$). Как видим, за счет скачка нормальной составляющей векторов \mathbf{H}' , \mathbf{E}' , \mathbf{j}' , вытекающего из (22.44), (22.45) и материальных уравнений (22.15), (22.16) или (22.12), (22.13), в ДПС

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{E}' n) &= \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) \mathbf{E}'_1 n, \\ \Delta(\mathbf{H}' n) &= \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) \mathbf{H}'_1 n, \\ \Delta(\mathbf{j}' n) &= \left(\frac{\sigma_2 \epsilon_1}{\sigma_1 \epsilon_2} - 1 \right) \mathbf{j}' n, \end{aligned} \quad (22.47)$$

на границах сред могут возникать большие термомеханические и электромагнитные эффекты, например большие пондеромоторные силы и мощности и другие физические краевые эффекты

Возвращаясь к уравнениям (22.38), (22.42), (22.43) пьезоэлектрических эффектов, используемых для получения токов с помощью пьезокерамик или других пьезоактивных тел, кроме обычных механических граничных (и начальным) условий на границе тела необходимо задание φ или производной от φ по какому-нибудь направлению. Если, например, на разделенных между собой частях поверхности Σ находятся проводники с потенциалами $V_1^0 = V(t)$ на Σ_1 и $V_2^0 = -V(t)$ на Σ_2 и остальная часть окружена вакуумом (или воздухом), то вследствие большой диэлектрической проницаемости тела

$$\|\hat{\epsilon}\|_{\text{тело}} \gg \|\hat{\epsilon}\|_{\text{озд}}$$

граничные условия (22.45), (22.46) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \pm V(t) \quad \text{на } \Sigma_1, \Sigma_2, \\ \mathbf{D}'\mathbf{n} &= D'_i n_i = 0 \quad \text{вне } \Sigma_1, \Sigma_2 \end{aligned} \quad (22.48)$$

Следовательно, при свободной от механической нагрузки поверхности тела Σ потенциал $\pm V(t)$ вызывает деформации, а при переменной разности $V(t) = V_0 \sin \omega t$ — колебания тела, особенно сильные в резонансных режимах. И наоборот, если слабыми механическими периодическими воздействиями на Σ возбуждать резонансные колебания тела, то на обкладках Σ_1, Σ_2 возникает значительная разность потенциалов $\pm V_0 \sin \omega t$, т. е. в замыкающем Σ_1, Σ_2 проводе возникает ток. Такой преобразователь энергии используется в пьезоэлектрической технике, например в пьезоэлектрических приборах.

Сильные термомеханические и электромагнитные эффекты возникают в телах-проводниках за счет периодических и импульсных магнитных полей и Джоулева тепла. Они описываются приведенными выше уравнениями и граничными условиями и требуют рассмотрения электромагнитных уравнений в теле и окружающей среде.

В магнитной гидродинамике обычно принимают, что термодинамические функции и напряжения S^{ij} не зависят от векторов \mathbf{D} , \mathbf{B} , считают явления поляризации и намагничивания отсутствующими, т. е. предполагают $\mu = \epsilon = 1$, и пренебрегают током смещения. Уравнения Максвелла (22.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho_e, \end{aligned} \quad (22.49)$$

а пондеромоторная сила ρF_s (22.18)

$$\rho F_s = \rho_e E + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (22.50)$$

называется силой Лоренца.

В случае баротропных течений газа или жидкости, для которых уравнение состояния имеет вид $p = p(\rho)$, уравнения движения и сохранения массы

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \text{grad } P(\rho) &= F_g + F_s, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v} &= 0 \quad \left(P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (22.51)$$

совместно с (22.50), уравнениями Максвелла (22.49) и законом Ома (22.17) дают замкнутую систему пятнадцати уравнений относительно тринадцати функций \mathbf{v} , ρ , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{j} .

При решении практических задач магнитной гидродинамики используют различные упрощенные системы уравнений. Ввиду малости распределенных зарядов полагают $\rho_e = 0$. В ряде случаев, например для сильно ионизированных газов, можно считать также, что среда имеет бесконечную проводимость σ . При этом упрощения уравнений оказываются весьма существенными. Для бесконечно проводящей среды из закона Ома (22.17) в силу конечности плотности тока \mathbf{j} получим $\rho_e = 0$, $\sigma = \infty$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad (22.52)$$

а из второго уравнения (22.49)

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}. \quad (22.53)$$

Уравнения Максвелла (22.3) и выражение силы (22.50) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \rho F_s &= -\frac{1}{4} \pi \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (22.54)$$

Отметим также, что для бесконечно проводящей среды джоулево тепло равно нулю.

В полученную таким образом замкнутую систему (22.51), (22.54), кроме скорости \mathbf{v} и плотности среды ρ , входит лишь одна векторная электромагнитная функция — напряженность магнитного поля \mathbf{H} .

Глава VI

МЕТОДЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§ 23. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЯ

Все уравнения МСС и граничные условия суть уравнения, связывающие между собой различные *размерные величины* Q_i , среди них — геометрические и механические: координаты и перемещения x , $u=x-x$, время t , скорость v , ускорение w , векторы базиса e_i , массовая F и поверхностная $P^{(n)}$ силы, напряжения физические σ_{ij} , компоненты тензора напряжений S_{ij} , деформации ε_{ij} , скорости деформаций v_{ij} , работа A , мощность R , кинетическая энергия K , различные механические константы среды — модуль упругости E , коэффициент вязкости μ и ряд других; термодинамические: температура T , количество тепла Q , тепловой поток q , внутренняя и свободная энергия u , ϕ , энтропия s , рассеяние ω^* , коэффициенты теплоемкости c , теплопроводности λ , расширения α и т. д. и величины β электромагнитной ($E, H, B, D, e \dots$) и другой природы.

Система единиц CGS достаточна для построения МСС (и всей физики) и содержит три независимых параметра: длину l (сантиметр), массу m (грамм), время τ (секунда).

Размерности

$$[l]=C, \quad [m]=G, \quad [\tau]=S \quad (23.1)$$

можно рассматривать как действительные числа, для которых определена коммутативная операция умножения и возведения в степень, т. е. определена группа величин Q_i ($i=0, 1, 2, \dots$) при $Q_0=1$, размерность которых $[Q_i]$ равна

$$[Q_i]=C^{\lambda_i} G^{\mu_i} S^{\nu_i}, \quad (23.2)$$

причем λ_i, μ_i, ν_i — числа, называемые *показателями размерности* Q_i . Любая величина Q_c называется *безразмерной*, если $\lambda_c=\mu_c=\nu_c=0$, т. е. $[Q_c]=1$. Для группы Q_i определена размерность произведения

$$[Q_i Q_j]=[Q_i][Q_j]=C^{\lambda_i+\lambda_j} G^{\mu_i+\mu_j} S^{\nu_i+\nu_j}. \quad (23.3)$$

В соответствии со свойствами всех уравнений МСС (вообще физики) операция сложения двух величин, отличных от нуля, опре-

делена только для величин с одинаковыми показателями размерности, т. е. для однородных величин; из равенства

$$Q_i + Q_j = 0 \quad (23.4)$$

следует

$$[Q_i] = [Q_j], \quad \lambda_i = \lambda_j; \quad \mu_i = \mu_j; \quad \nu_i = \nu_j. \quad (23.5)$$

Примеры размерных величин: координата x , перемещение u , длина l имеют размерность C :

$$[x] = [u] = [l] = C \quad (\lambda = 1, \mu = \nu = 0);$$

вектор скорости v , его компоненты в декартовой ортогональной системе координат $v_i = v^i$, скорость звука в воздухе c_0 имеют размерность

$$[v] = [v_i] = [c_0] = CS^{-1} \quad (\lambda = 1, \mu = 0, \nu = -1);$$

физическое напряжение σ_{ij} , энергия единицы объема W_1 :

$$[\sigma_{ij}] = [W_1] = C^{-1}GS^{-2} \quad (\lambda = -1, \mu = 1, \nu = -2);$$

массовая сила F , ускорение w , ускорение силы тяжести g :

$$[F] = [w] = [g] = CS^{-2} \quad (\lambda = 1, \mu = 0, \nu = -2);$$

объемная сила ρF , удельный вес γ :

$$[\rho F] = [\gamma] = C^{-2}GS^{-2} \quad (\lambda = -2, \mu = 1, \nu = -2);$$

кинетическая энергия K , потенциальная энергия U , количество тепла δQ тела:

$$[K] = [U] = [\delta Q] = C^2GS^{-2} \quad (\lambda = 2, \mu = 1, \nu = -2);$$

средняя «кинетическая» температура $T_{\text{кин}} = \frac{3}{2} kT$ (T — в градусах Кельвина):

$$[T_{\text{кин}}] = [K] = C^2GS^{-2} \quad (\lambda = 2, \mu = 1, \nu = -2).$$

Примеры соотношений: кинематическое соотношение между x , v , t

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad [v] = \left[\frac{dx}{dt} \right] = CS^{-1};$$

уравнения движения в декартовых координатах x

$$-\rho \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = 0,$$

$$\left[\rho \frac{dv_i}{dt} \right] = \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] = [\rho F_i] = C^{-2}GS^{-2};$$

связь между внутренней энергией u , свободной энергией ψ , энтропией s и температурой T в единице объема в системе CGS для кинстических температур и энтропии

$$T_{\text{кин}} \equiv \frac{3}{2} kT, \quad s \equiv_{\text{кин}} \frac{2}{3k} s$$

имеет вид

$$\rho(u - \psi - sT) = \rho(u - \psi - s_{\text{кин}} T_{\text{кин}}) = 0,$$

и потому

$$[\rho u] = [\rho \psi] = [\rho s_k] [T_k] = [\rho sT] = C^{-1} G S^{-2} = [\sigma_{ij}],$$

$$[\rho] = C^{-3} G, \quad [u] = [\psi] = [s_k] [T_k] = C^2 S^{-2},$$

и так как $[T_k] = C^2 G S^{-2}$, то $[s_k] = C^2 S^{-3} [T_k]^{-1} = G^{-1}$, т. е. энтропия s_k в CGS имеет размерность единицы, деленной на массу.

Преобразование масштаба единиц. Вместо базиса (системы единиц измерения) CGS с независимыми параметрами l, m, τ применяется базис MKS (как основной в международной системе СИ) с параметрами l_m (метр), m_k (килограмм-масса), τ_s (секунда), который отличается от CGS только масштабом основных параметров:

$$l_m = 10^{-2} l, \quad m_k = 10^{-3} m, \quad \tau_s = \tau. \quad (23.6)$$

Это значит, что времена совпадают, некоторая величина, имеющая l единиц длины системы CGS, будет иметь $l_m = 0,01l$ единиц длины системы MKS, масса, имеющая m единиц в CGS, будет иметь $m_k = 0,001m$ единиц в MKS. Единица длины одного и того же отрезка ab в CGS равна $1/l$, в MKS — $1/l_m$ и, следовательно,

$$1/l_m = 10^2 1/l, \quad 1/m_k = 10^3 1/m, \quad 1/\tau_s = 1/\tau.$$

Единица силы в системе MKS — $1 N$ (ньютон) = 10^5 дин.

Системы единиц, например ABD с тремя основными параметрами l_A, m_B, τ_D , получающимися из CGS преобразованием масштаба основных параметров

$$l_A = \alpha_1 l, \quad m_B = \alpha_2 m, \quad \tau_D = \alpha_3 \tau, \quad (23.7)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — числа, образуют группу с преобразованием подобия, в которой сохраняются все определения и свойства системы CGS (23.1) — (23.5), если обозначить

$$[l_A] = A, \quad [m_B] = B, \quad [\tau_D] = D. \quad (23.8)$$

Пусть данная размерная величина выражена через основные параметры CGS и ABD (k_1, k_2 — безразмерные величины):

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv Q_{CGS} = k_1 l^{\lambda_1} m^{\mu_1} \tau^{\nu_1}, & [Q_1] &= C^{\lambda_1} G^{\mu_1} S^{\nu_1}, \\ Q_2 &\equiv Q_{ABD} = k_2 l_A^{\lambda_2} m_B^{\mu_2} \tau_D^{\nu_2}, & [Q_2] &= A^{\lambda_2} B^{\mu_2} D^{\nu_2}. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Внося сюда значения (23.7), получим выражение Q_2 в системе CGS :

$$\begin{aligned} (Q_2)_{CGS} &= Q_1 = k l^{\lambda_2} m^{\mu_2} \tau^{\nu_2} = k_1 l^{\lambda_1} m^{\mu_1} \tau^{\nu_1}, \\ k &= k_2 \alpha_1^{\lambda_2} \alpha_2^{\mu_2} \alpha_3^{\nu_2}, \end{aligned}$$

где k — безразмерный параметр. Так как l, m, τ независимы, то

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1, & \mu_2 &= \mu_1, & \nu_2 &= \nu_1, & k &= k_1, \\ k_2 &= k_1 \alpha_1^{-\lambda_1} \alpha_2^{-\mu_1} \alpha_3^{-\nu_1}. \end{aligned} \quad (23.10)$$

Следовательно, в группе базисов с преобразованием подобия показатели размерности любой величины сохраняются.

Преобразование структуры единиц базиса. Преобразования подобия изменяют масштаб единиц, но не их структуру: длины остаются длинами, массы — массами, времена — временами, а следовательно, сохраняется физический смысл всех величин Q (23.9). Очевидно, что для представления размерностей физических величин Q вместо базиса MKS (или другого из группы с преобразованием подобия) можно взять любой трехпараметрический базис $B_1 B_2 B_3$ с основными параметрами, получающийся, например, из MKS преобразованием структуры:

$$\begin{aligned} B_i &= [b_i] = M^{s_{i1}} K^{s_{i2}} S^{s_{i3}}, \\ b_i &= b_i^0 l^{s_{i1}} m^{s_{i2}} \tau^{s_{i3}}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (23.11)$$

где $b_i^0 \neq 0$ — безразмерные, s_{ij} — безразмерные числа, удовлетворяющие условию взаимной однозначности базисов $B_1 B_2 B_3$ и MKS . Логарифмируя (23.11), получим три уравнения для $\ln l, \ln m, \ln \tau$:

$$s_{i1} \ln l + s_{i2} \ln m + s_{i3} \ln \tau = \ln \frac{b_i}{b_i^0} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (23.12)$$

поскольку b_i — независимые размерные единицы базиса B_1, B_2, B_3 , то $b_i \neq b_i^0$, и потому базисы взаимно однозначны при условии

$$\text{Det}(s_{ij}) = |s_{ij}| \neq 0. \quad (23.13)$$

Базис $B_1 B_2 B_3$ фиксированной структуры имеет группу преобразований подобия (масштаба единиц)

$$b'_i = \alpha_i b_i \quad (i=1, 2, 3),$$

при которых показатели структуры s_{ii} неизменны.

Базис CDS (сантиметр, длина, секунда) получается из CGS заменой параметров l, m, τ на $b_1=l, b_2=F, b_3=\tau$, причем

$$b_1^0 = b_2^0 = b_3^0 = s_{11} = s_{22} = s_{33} = 1;$$

$$s_{12} = s_{13} = s_{31} = s_{32} = 0;$$

$$s_{21} = 1; \quad s_{23} = -2; \quad F = l m \tau^{-2} \text{ дин.}$$

В MCS и в технике применяются различные базисы $B_1 B_2 B_3$, например, $CK_g S$ (сантиметр, килограмм-сила, секунда) с основными параметрами l, P, τ , получающимися из CDS преобразованием подобия $\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 1,02 \cdot 10^{-6}, P \approx 1,02 \cdot 10^{-6} F = 0,102 N$; точнее, $\alpha_2 = 10^{-5}/g, g = 9,81 \dots \text{ м/с}^2$.

Базис MKS с тремя независимыми размерными параметрами l, m, τ необходим и достаточен для всей теории MCS , но не во всех задачах является целесообразным. В теории деформаций необходим и достаточен только M с длиной l , в кинематике — MS с l и τ , в статике сред со склерономными свойствами — CK_g и т. д.

Но уже в геометрии вместо одного необходимого и достаточного M с длиной l в метрах бывает удобно ввести еще один (или несколько) независимый параметр — длину L с наименованием размерности D_0 , т. е. ввести базис независимых величин MD_0 с параметрами l, L , где L , например, километры. Но при этом для построения геометрии тел, малые размеры которых измеряются в M , а большие — в независимых D_0 , необходимо ввести еще один размерный параметр — константу структуры λ с размерностью

$$[\lambda] = MD_0^{-1}, \quad \lambda = 10^{-5} \frac{\text{км}}{\text{см}}$$

и написать закон $l = \lambda L$. Однопараметрическая геометрия в базисе M и двухпараметрическая — в базисе MD_0 с законом $l = \lambda L$ равноправны.

Введение абсолютной температуры T в кельвинах (K) соотношением $T = 2T_{\text{кин}}/3k$ также является примером расширения базиса MKS : вместо $T_{\text{кин}}$, имеющей размерность джоуля, введен независимый параметр TK , и потому возник новый параметр — постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$; поэтому энтропия единицы массы s , по условию $Ts = T_k s_k$, имеет размерность квадрата скорости, деленного на K .

Международная система единиц СИ дополняет базис MKS единицами различной физической природы и в первую очередь едини-

цей силы электрического тока 1 ампер с обозначением А. Коротко система метр — килограмм — секунда — ампер обозначается МКСА. В СИ используются производные от МКСА единицы:

мощности — ватт	$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1}$;
заряда — кулон	$1 \text{ к} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$;
напряжения — паскаль	$1 \text{ ПА} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$;
напряжения — вольт	$1 \text{ В} = 1 \text{ ВтА}^{-1}$;
сопротивления — ом	$1 \text{ Ом} = 1 \text{ ВА}^{-1}$

и другие с соответствующими переходными размерными коэффициентами.

Изложение МСС, данное в гл. I—III, было возможно без привлечения теории размерностей, оно исходило из того, что существует система единиц измерения, в которой алгебраические и функциональные операции над совокупностью физических величин различной физической природы возможны. Каждая из систем *CGS*, *MKS* и множество других с тремя базисными и размерными единицами механики обеспечивают корректность теории. Это особенно хорошо видно на материале § 22, в котором отражаются взаимодействия термомеханических и электромагнитных полей, и уравнения (22.6)—(22.11) записаны в гауссовой (абсолютной) системе единиц (*CGS*). Если с помощью двух универсальных констант $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$, $\mu_0 \approx 1,255 \cdot 10^{-9}$, $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ ($c \text{ МС}^{-1}$ — скорость света) в них произвести замены $\mathbf{E} \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{E}$, $\mathbf{D} \rightarrow \sqrt{4\pi/\epsilon_0} \mathbf{D}$, $\mathbf{H} \rightarrow \sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{H}$, $\mathbf{B} \rightarrow \sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{B}$, $(\rho, \mathbf{j}) \rightarrow (\rho, \mathbf{j})/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$, то получим эти уравнения в системе СИ, причем в (22.6)—(22.7) пропадут коэффициенты 4π и c^{-1} , а в (22.9)—(22.11) для \mathbf{D}' , \mathbf{B}' , \mathbf{j}' вместо ϵ , μ , σ будут $\epsilon_0\epsilon$, $\mu_0\mu$ и $\sigma/(4\pi\epsilon_0)$.

Приведенные примеры показывают, что всякий минимально необходимый базис может быть расширен, т. е. введен базис с увеличенным числом независимых параметров, и тогда возникают дополнительные зависимые. С другой стороны, примеры из кинематики и статики показывают, что трехпараметрический базис в частных задачах может быть сужен. Таким образом, в зависимости от частной задачи МСС базис *CGS* или *MKSA* бывает целесообразно заменить другим, упрощающим решение задачи или ее формулировку.

Пусть (q) — некоторый n -мерный полный базис для m размерных физических величин Q_1, Q_2, \dots, Q_m , т. е. независимые основные величины q_1, q_2, \dots, q_n таковы, что: 1) всякая величина Q_j представима в базисе (q) в виде

$$Q_j = c_j q_1^{\alpha_{j1}} q_2^{\alpha_{j2}} \dots q_n^{\alpha_{jn}} \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (23.14)$$

где c_j, a_{ij} — параметры, не зависящие от q_i , причем величины, не зависящие от q_i , называются безразмерными; a_{ij} ($j=1, 2, \dots, m$, $i=1, 2, \dots, n$) называются показателями размерности Q_j ; 2) всякая безразмерная величина в группе Q_j ($j=1, 2, \dots, m$), обозначаемая Π , может быть представлена в виде

$$\Pi = Q_1^{x_1} Q_2^{x_2} \dots Q_m^{x_m}; \quad (23.15)$$

3) не существует, кроме тождественных, никаких соотношений между

$$q_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Пусть существует соотношение между величинами Q_j , например любое из уравнений МСС:

$$H(Q_1, Q_2, \dots, Q_m) = 0. \quad (23.16)$$

π -теорема теории размерностей утверждает, что соотношение (23.16) всегда может быть преобразовано к виду

$$H_1(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}) = 0, \quad (23.17)$$

где r — ранг матрицы показателей размерности Q_j , т. е. матрицы

$$\|a_{ji}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}. \quad (23.18)$$

Первая часть теоремы, по существу, состоит в том, что $H(Q)$ может зависеть только от безразмерных комбинаций типа (23.15), и она очевидна, так как результат подстановки (23.14) в (23.16) в противном случае противоречил бы условию 3). Вторая часть утверждает, что число безразмерных Π_k , которые входят в (23.17), равно числу величин Q_j минус ранг матрицы $\|a_{ji}\|$ их показателей размерности. Простое доказательство сводится к подстановке (23.14) в (23.15), которая дает

$$\Pi = c q_1^{a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m} \dots q_n^{a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m}, \quad (23.19)$$

$$c = c_1^{x_1} c_2^{x_2} \dots c_m^{x_m},$$

откуда по определению безразмерных величин 2) следует равенство нулю всех показателей размерности Π :

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} x_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (23.20)$$

По условию существования соотношения (23.16) отличные от нуля решения системы (23.20) существуют, т. е. ранг r матрицы (23.18) не равен нулю. Не изменяя общности, квадратную матрицу ранга r в (23.18) можно считать расположенной в левом верхнем углу. Так как ранг r равен числу линейно независимых уравнений в системе (23.20), то, решая первые r уравнений (23.20) относительно x_1, \dots, x_r , найдем

$$x_k = \sum_{p=r+1}^m A_{kp} x_p \quad (k=1, 2, \dots, r), \quad (23.21)$$

где A_{kp} — отнесенные к определителю $|a_{ji}|$ при $(j, i=1, 2, \dots, r)$ его алгебраические дополнения, получаемые заменой столбца k показателями a_{kp} ; остальные $n-r$ уравнений (23.20) будут линейно зависимы с (23.21), т. е. будут их следствиями. Внося значения (23.21) в (23.15), получим для любого Π при произвольных x_{r+1}, \dots, x_m :

$$\Pi = \Pi_1^{x_{r+1}} \Pi_2^{x_{r+2}} \dots \Pi_{m-r}^{x_m}, \quad (23.22)$$

где обозначены независимые безразмерные параметры

$$\Pi_{k-r} = Q_1^{A_{1k}} Q_2^{A_{2k}} \dots Q_r^{A_{rk}} Q_k \quad (k-r=1, 2, \dots, m-r). \quad (23.23)$$

Итак, только $m-r$ безразмерных независимых Π_i могут входить в уравнение (23.16), т. е. оно всегда приводимо к виду (23.17).

Эта возможность уменьшать число входящих в уравнения МСС параметров и используется для упрощения их на основе π -теоремы теории размерностей.

Дополнение системы МКС единицей силы тока 1 А, следовательно, единицей заряда 1 Кл и т. д., улучшает ее для практического использования в смешанных задачах механики и электродинамики. Килограмм и кулон в принципе равноправны, и полная система единиц МКС может быть заменена также полной МКлС; первая удобнее в механике, вторая — в электродинамике. Косвенное теоретическое основание, однако не столь принципиальное, усматривается в том, что при использовании $(q_1, q_2, q_3) = (M, K, C)$ в представлении (23.14) почти все механические величины $Q_j^{\text{мех}}$ будут иметь целочисленные показатели размерности $(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3})$, но почти все $Q_j^{\text{эл}}$ — дробные показатели. Обратные свойства возникнут на основе системы $(q_1, q_2, q_3)^{\text{эл}} = (M, \text{Кл}, C)$. Но этот дефект исчезнет в четырехмерном базисе $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (M, K, C, A)$ или $(M, K, C, \text{Кл})$: все соответствующие показатели размерностей станут целочисленными.

Безразмерные параметры и подобие. Пусть некоторая краевая задача МСС, которую обозначим (K) , определяется размерными

параметрами Q_1, \dots, Q_m , между которыми существуют соотношения

$$H_s(Q_1, \dots, Q_m) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (23.24)$$

и пусть все Q_j состоят из размерных параметров-констант $c_1 \dots c_{N_c}$, параметров — независимых переменных x_1, \dots, x_{N_x} , параметров — известных функций $f_1(x) \dots f_{N_f}(x)$ и параметров — искомых функций $\varphi_1 \dots \varphi_{N_\varphi}$ так что $N_c + N_x + N_f + N_\varphi = m$; согласно (23.24) последние есть функции c_i, x_j, f_l, φ_k подлежащие определению; размерности всех c_i, x_j, f_l, φ_k в некотором заранее выбранном базисе q_1, \dots, q_n предполагаются известными.

Найдем согласно (23.23) все независимые безразмерные параметры Π_k ($k=1, 2, \dots, m-r$) из Q_j , т. е. из (c, x, f, φ) ; после этого, пользуясь (23.22), т. е. подбирая числа $\kappa_{r+1} \dots \kappa_m$, найдем все независимые между собой безразмерные постоянные параметры задачи (K), которые обозначим R_α ($\alpha=1, 2, \dots, n_c$):

$$(\Pi)_c = (R_1, R_2, \dots, R_{n_c}); \quad (23.25)$$

затем аналогично найдем независимые безразмерные Π для группы (c_i, x_j) , которые назовем *безразмерными переменными* задачи (K):

$$(\Pi)_{cx} = (y_1, y_2, \dots, y_{n_x}). \quad (23.26)$$

Наконец, найдем таким же путем все независимые безразмерные функции для групп (c_i, x_j, f_l) , $(c_i, x_j, f_l, \varphi_k)$:

$$(\Pi)_{cxf} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{n_f}); \quad (23.27)$$

$$(\Pi)_{cxf\varphi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_\varphi}).$$

Из $(\Pi)_{cx}$ путем подстановки в (23.22) вместо $\Pi_1 \dots \Pi_{m-r}$ и подбора $(\kappa_{r+1} \dots \kappa_m)$ могут получаться безразмерные постоянные, но они будут зависимыми от $(\Pi)_c$; аналогично из $(\Pi)_{cxf}$ могут получаться зависимые от $(\Pi)_c$ и $(\Pi)_{cx}$ и из $(\Pi)_{cxf\varphi}$ — зависимые от $(\Pi)_c$, $(\Pi)_{cx}$, $(\Pi)_{cxf}$. Основной группой независимых безразмерных переменных $(\Pi)_x$ назовем те из $(\Pi)_{cx}$, по отношению к которым группа $(\Pi)_x$ является независимой. Аналогично основной группой независимых безразмерных функций $(\Pi)_f$ назовем те из $(\Pi)_{cxf}$, по отношению к которым $(\Pi)_c$ и $(\Pi)_x$ являются независимыми. Аналогично построим группу $(\Pi)_\varphi$. Подчеркнем, что независимость означает, что при подстановке вместо $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}$ параметров рассматриваемой независимой группы нельзя найти чисел $\kappa_{r+1}, \dots, \kappa_m$, таких, чтобы получился параметр предыдущей независимой группы. При таком отборе основных групп очевидно, что все независимые безразмерные параметры задачи (K) будут учтены, все уравнения (23.24) приведутся к виду

$$H_s(\Phi, \mathcal{F}, y, R) = 0, \quad (23.28)$$

и их решения будут иметь вид

$$\Phi = h(\mathcal{F}, y, R), \quad (23.29)$$

где Φ — любая из Φ_k ; \mathcal{F}, y — все \mathcal{F}_i, y_i ; R — все R_i . Здесь h — некоторый оператор по переменным $(\Pi)_x$.

Если две краевые задачи $(K)_M$ и $(K)_H$ таковы, что числа R тождественно совпадают, переменные y, \mathcal{F} имеют одинаковую область изменения и совпадают и уравнения (23.28), т. е. операторы H_s , совпадают, то безразмерные решения (23.29) будут одинаковыми; одна из таких задач — $(K)_H$ — и называется задачей природы, другая — $(K)_M$ — задачей модели. Безразмерные постоянные R называются параметрами подобия, сами явления в $(K)_H$ и $(K)_M$ — подобными.

Выяснение параметров R , независимых систем параметров y, \mathcal{F}, Φ и приведение уравнений (23.24) к виду (23.28) называют иногда *ревизионным анализом* задачи (K) . Как видим, в математическом отношении это чисто алгебраический анализ теории размерностей, основанный на построении параметров (23.23). Он выясняет критерии подобия и приводит задачу к безразмерному виду, т. е. упрощает задачу, так как исключает несущественные параметры. При числовых расчетах и решениях задач на ЭВМ он существенно сокращает вычислительные работы.

§ 24. ПРИМЕРЫ РЕВИЗИОННОГО АНАЛИЗА И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим некоторый класс *изотермических задач* МСС в декартовых эйлеровых координатах (x_1, x_2, x_3) . Уравнения движения

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad (24.1)$$

содержат размерные величины $x, t, v, \rho, p, \sigma_{ij}$ и F . Уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (24.2)$$

не вводит новых величин; закон связи между напряжениями и деформациями

$$p = P^t \left(\rho, \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right), \quad (24.3)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{S}_{ij}^t \left(\rho, \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right), \quad (24.4)$$

где скобками отмечены некоторые известные операторы по времени от указанных аргументов, делает систему уравнений МСС замкнутой. Пусть по начальным и граничным условиям некоторой задачи определены в системе МКС постоянный линейный размер l_0 (размер границы области тела и т. п.), постоянное время t_0 (период колебания части границы, период изменения внешней нагрузки и т. п.), постоянная скорость v_0 м/с и две постоянные, имеющие размерность напряжения, p_0 и σ_0 (давление на границе, амплитуда действующего внешнего напряжения и т. п.). Характерное постоянное значение известной массовой силы обозначим g_0 , начальное или другое известное значение искомой величины плотности — ρ_0 . Начальными и граничными условиями, возможно, заданы и другие постоянные, но мы ограничимся здесь классом задач, в которых заданы только перечисленные постоянные или еще другие, одинаковые с ними по размерностям.

Перечисленные семь постоянных $l_0, t_0, v_0, g_0, \rho_0, \sigma_0, p_0$ в трехмерном базисе, очевидно, образуют только четыре основных постоянных безразмерных параметра

$$R_1 = \frac{l_0}{v_0 t_0}, \quad R_2 = \frac{v_0^2}{l_0 g_0}, \quad R_3 = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad R_4 = \frac{\sigma_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad (24.5)$$

остальные (если заданы еще $l_1, t_1, v_1, g_1, \rho_1, \sigma_1$) обозначим одной буквой R' ($R'_l = l_1/l_0, R'_t = t_1/t_0, \dots, R'_\sigma = \sigma_1/\sigma_0$). Независимые переменные x_1, x_2, x_3 и t имеют размерности C и M , и потому группа основных независимых переменных $(\Pi)_{cx}$ состоит из четырех:

$$y_i \equiv x_i^* = \frac{x_i}{l_0}, \quad y_4 \equiv t^* = \frac{t}{t_0}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (24.6)$$

группа $(\Pi)_{cxf}$ — из трех: $\mathcal{F}_i = F_i/g_0$ и нескольких граничных. Искомые функции ρ, p, v, σ_{ij} образуют два скаляра, один вектор и один девиатор

$$\begin{aligned} \rho^* &\equiv \Phi_1 = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p^* \equiv \Phi_2 = \frac{p}{p_0}, \\ v_i^* &\equiv \Phi_3^i = \frac{v_i}{v_0}, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^* \equiv \Phi_{ij}^4 = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\sigma_0}. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Внося значения x_i, t и $\rho, p, \tilde{\sigma}_{ij}$ из (24.6) и (24.7) в (24.1) и (24.2), учитывая (24.5), получим безразмерные уравнения

$$\begin{aligned} R_1 \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + v_i^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} &= \frac{1}{R_2} \rho^* F_i^* - R_3 \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + R_4 \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}^*}{\partial x_j^*}, \\ R_1 \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\rho^* v_i^*) &= 0. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Из (24.3), (24.4), (24.7) следует, что операторы P , S_{ij} должны иметь размерность ρ_0 и σ_0 ; но это — характеристики свойств вещества, а не краевой задачи, и потому они не могут зависеть от перечисленных выше постоянных $l_0, t_0, v_0, g_0, \rho_0, \sigma_0$. Эти операторы имеют свои размерные постоянные структуры P_s, σ_s с размерностью Па, т. е. они имеют вид

$$p = P_s P_*^t \left(\rho, \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right), \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_s S_{ij}^t \left(\rho, \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right), \quad (24.9)$$

где P_*^t, S_{ij}^t — безразмерные операторы по размерному t от размерных параметров. Но такие зависимости возможны только при условии, что вещество характеризуется еще по крайней мере двумя физическими постоянными: плотностью ρ_s и временем t_s или ρ_s и μ_s , имеющей размерность Нс/м², или другой парой независимых постоянных, таких, что вместе с ρ_s или σ_s они составляют трехмерный базис, получающийся из МКС преобразованием структуры. Такой базис позволяет построить константы t_s, ρ_s, μ_s . Тогда из них и функций $\rho, \frac{\partial v_m}{\partial x_n}$ можно построить безразмерные переменные и функции

$$\frac{t}{t_s} = \frac{t_0}{t_s} t^*; \quad \frac{\rho}{\rho_s} = \frac{\rho_0}{\rho_s} \rho^*; \quad t_s \frac{\partial v_m}{\partial x_n} = \frac{t_s v_0}{l_0} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_n^*};$$

$$\frac{\mu_s}{\sigma_s} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} = \frac{\mu_s v_0}{\sigma_s l_0} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_n^*}, \dots$$

Операторы P_*^t и S_{ij}^t , следовательно, обязательно имеют вид

$$P_* = P_*^{t*} \left(\frac{1}{R_5} \rho^*(t_1^*, \mathbf{x}^*), \quad \frac{1}{R_6} \frac{\partial v_m^*(t_1^*, \mathbf{x}^*)}{\partial x_n^*} \right), \quad S_{ij}^* = S_{ij}^{t*}(\dots). \quad (24.10)$$

где обозначены

$$R_5 = \frac{\rho_s}{\rho_0}, \quad R_6 = \frac{\sigma_s l_0}{\mu_s v_0} = \frac{l_0}{t_s v_0}, \quad R_7 = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}, \quad (24.11)$$

причем в (24.10) могут входить еще и другие безразмерные физические постоянные; параметр R_7 возникает из равенства $\sigma_0 \tilde{\sigma}_{ij}^* = \sigma_s S_{ij}^*$.

Система уравнений (24.8), (24.10) представляет безразмерный вид уравнений (24.1), (24.2), (24.3), (24.4); вместе с граничными условиями, которые при использовании констант $l_0, t_0, v_0, g_0, \rho_0, \sigma_0$ и параметров (24.5) станут безразмерными, они определяют задачу (K).

Решение рассматриваемого класса задач имеет вид

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \rho^* (t^*, x^*, F^*, R_1, \dots, R_4, R_5, R_6, R_7), \\ p &= p_0 P^* (\dots), \quad v_i = v_0 v_i^* (\dots), \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_0 \sigma_{ij}^* (\dots). \end{aligned} \quad (24.12)$$

Скобки (...) содержат перечисленные для ρ^* аргументы и (при $F^* = \text{const}$) ρ^* , P^* , v_i^* , σ_{ij}^* — некоторые их функции.

1. Тяжелая несжимаемая идеальная жидкость (§ 14): $\rho = \rho_0 = \rho_s = \text{const}$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_s = 0$, давление $p = P_s P^*$ неопределенно и является искомой функцией (x^* , t^*). Заданы постоянные t_0 , l_0 , v_0 , g_0 , ρ_0 . Параметры подобия (24.5), (24.11) сводятся к

$$R_1 = \frac{l_0}{v_0 t_0}, \quad R_2 = \frac{v_0^2}{l_0 g_0}, \quad R_3 = \frac{\rho_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad (24.13)$$

R_2 называется *параметром Фруда*. Давление в любой точке x в момент t в воде равно $p_0 \Phi_2$

$$p = R_3 \rho_0 v_0^2 \Phi_2 \left(\frac{x}{l_0}, \frac{t}{t_0}; R_1, R_2, R_3 \right). \quad (24.14)$$

Если движение установившееся (t_0 не задано), имеется свободная поверхность и задано только давление на ней $p_1 = 0$, то p_0 не задано, и остается взять $p_0 = \rho_0 g_0 l_0$, следовательно $R_2 R_3 = 1$. При этом в (24.14) $\Phi_2 = \Phi_2 \left(\frac{x}{l_0}, R_2 \right)$.

2. Невесомый идеальный баротропный газ (§ 14): движение установившееся: $g_0 = 0$, $\sigma_0 = 0$, $\sigma_s = \mu_s = 0$; заданы p_s , ρ_s (следовательно, энтропия); уравнения (24.4) дают

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 0, \quad p = p_s \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^\gamma, \quad \rho_0 = \rho_s \left(\frac{p_0}{p_s} \right)^{1/\gamma};$$

заданные размерные постоянные l_0 , v_0 , p_0 , ρ_0 , $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ (c_0 — скорость звука при давлении p_0). Постоянные параметры (24.5), (24.11), отличные от 0, ∞ :

$$\frac{1}{\sqrt{R_3}} = Ca = M_0 = \frac{v_0}{c_0}, \quad R_p = \frac{p_s}{p_0}, \quad (24.15)$$

где Ca — *параметр Коши*, обозначаемый часто через M_0 и называемый *числом Маха* при $p = p_0$. Истечение газа через сопло Лаваля (коническую расширяющуюся трубу с минимальным диаметром $d = l_0$) из большой емкости, в которой $p = p_s$, $\rho = \rho_s$, в воздухе, где давление p_0 , плотность ρ_0 , определяется скоростью $v = v_0 v^*$ и давлением $p = p_0 p^*$:

$$v^* = v^* \left(\frac{x}{l_0}, \frac{p_s}{p_0}, M_0 \right), \quad p^* = p^* \left(\frac{x}{l_0}, \frac{p_s}{p_0}, M_0 \right). \quad (24.16)$$

3. Вязкая невесомая ($g_0=0$) несжимаемая жидкость (§ 15) при установившемся движении в ней тела со скоростью v_0 ; коэффициент вязкости жидкости $\mu=\mu_s$, плотность $\rho=\rho_0$, характерный размер тела l_0 . Соотношения (24.3), (24.4)

$$p \text{ — неопределенно, } \tilde{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

приводятся к виду (24.9), (24.10)

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_s \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right), \quad \sigma_s = \frac{\mu v_0}{l_0}.$$

Параметры (24.5), (24.11) сводятся к R_3 , R_4 , R_7 или к независимым

$$R_3 = \frac{\rho_0}{\rho_0 v_0^2}, \quad \frac{1}{R_4 R_7} = \frac{\rho_0 l_0 v_0}{\mu} = \frac{l_0 v_0}{\nu} = Re, \quad (24.17)$$

поскольку σ_0 не задано (R_4 , R_7 по отдельности неопределенны). Решение этих задач имеет вид

$$\begin{aligned} v_i &= v_0 v_i^*, \quad p = p_0 p^*, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\mu v_0}{l_0} S_{ij}^*, \\ v_i^* &= v_i^* \left(\frac{x}{l_0}, Re, R_3 \right), \quad p^* = p^* \left(\frac{x}{l_0}, Re, R_3 \right), \\ S_{ij}^* &= S_{ij}^* \left(\frac{x}{l_0}, Re, R_3 \right). \end{aligned} \quad (24.18)$$

Re называется *числом Рейнольдса* и вместе с R_3 , зависящим от давления на границе области течения, определяет структуру потока. Сила сопротивления тела получится интегрированием по поверхности тела проекции σ_{ij} на направление скорости тела, т. е. будет равна

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= c \mu v_0 l_0 + c_1 \rho_0 v_0^2 l_0^2, \\ c &= c(Re, R_3), \quad c_1 = c_1(Re, R_3). \end{aligned} \quad (24.19)$$

При медленных движениях $v_0 \rightarrow 0$ второе слагаемое выражения \mathcal{P} исчезнет, первое при $Re \rightarrow 0$, $R_3 \rightarrow \infty$ будет линейной функцией v_0 , коэффициент c будет постоянным. Для шара (например, капли росы) $\mathcal{P} = c \mu v_0 l_0$, $l_0 = d$, $c = 6\pi$.

4. Идеально упругое изотропное твердое тело в равновесии (§ 16, 17). Характерные константы тела — размер l_0 , плотность $\rho_0 = \rho_s$, модуль объемной упругости $\rho_s = K$ Па, модуль сдвига G Па ($\sigma_s = 2G$); внешние нагрузки: объемная сила $\rho \mathbf{F}$ характеризуется удельным весом $\rho_0 g_0$, поверхностная — распределенной

σ_0 Па и сосредоточенной \mathcal{P}_0 Н; перемещение границы характеризуется постоянной u_0 м. Операторы P^* , S_{ij}^* — просто функции тензора деформаций

$$P^* = P^*(\varepsilon_{mn}), \quad S_{ij}^* = S_{ij}^*(\varepsilon_{mn}), \quad (24.20)$$

$$2\varepsilon_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{x_n},$$

где x_1, x_2, x_3 — лагранжевы (при $t=0$ декартовы) координаты точек тела, связанные с вектором скорости \mathbf{v} соотношением

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (24.21)$$

$$t=0, \quad \mathbf{u}=0.$$

Время t — вспомогательный параметр, константы t_0, v_0 не заданы. Из группы (24.5) и (24.11) и данных K, G, \mathcal{P}_0 находим безразмерные параметры

$$r_1 = \frac{\mathcal{P}_0}{2Gl_0^2}, \quad r_2 = \frac{\rho_0 g_0 l_0}{2G}, \quad r_3 = \frac{\sigma_0}{2G}, \quad r_4 = \frac{u_0}{l_0}, \quad r_5 = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}. \quad (24.22)$$

Первые четыре характеризуют степени деформации от силы \mathcal{P}_0 , от веса, от σ_0 и от перемещения u_0 , пятое выражается через коэффициент Пуассона тела ν . Перемещения и напряжения в любой точке тела выражаются функциями

$$u_i = l_0 u_i^* \left(\frac{\mathbf{x}}{l_0}, r_1, \dots, r_5 \right), \quad \sigma_{ij} = 2G \sigma_{ij}^* \left(\frac{\mathbf{x}}{l_0}, r_1, \dots, r_5 \right), \quad (24.23)$$

а при малых деформациях — линейными функциями r_n ($n \neq 5$):

$$u_i = l_0 \sum_{n=1}^4 r_n \varphi_{in} \left(\frac{\mathbf{x}}{l_0}, \nu \right), \quad \sigma_{ij} = 2G \sum_{n=1}^4 r_n \varphi_{ij}^n \left(\frac{\mathbf{x}}{l_0}, \nu \right). \quad (24.24)$$

Если геометрически подобно уменьшить все размеры тела в N раз, сохраняя неизменными конфигурацию нагрузок на поверхности и константы материала (G, ν), то подобие будет соблюдаться, т. е. u_i^*, σ_{ij}^* будут одинаковыми в точках \mathbf{x}/l_0 , если $\rho_0 g_0 l_0, u_0/l_0, \sigma_0$ останутся без изменения, т. е. если \mathcal{P}_0 уменьшается в N^2 раз, удельный вес $\gamma_0 = \rho_0 g_0$ увеличится в N раз, заданное перемещение u_0 уменьшится в N раз. Такое моделирование реализуется на центрифугах.

Б. Динамика сред, обладающих склерономными свойствами (§ 14, 16, 17, 20) в отношении задаваемых внешних констант, от-

личается от п. 4 заданием характерного времени t_0 (или частоты ω_0) действия нагрузки и скорости v_0 какой-то части среды. В отношении свойств среды существенное отличие в том, что задана плотность $\rho_0 = \rho_s$ и известно, что операторы P^* и S_{ij}^* — функции ε_{ij} или функционалы функций ε_{mn} по инвариантному параметру, составленному из них же (например, по $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$). Константы K , G , ν остаются и, может быть, дополняются еще группой K' , G' , ν' той же размерности. Возникают, следовательно, дополнительные постоянные параметры вещества — одна, две (или больше) скорости звука:

$$c_1 = \sqrt{\frac{3K + 4G}{3\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}. \quad (24.25)$$

Безразмерные параметры r_1, \dots, r_5 (24.22) дополняются динамическими

$$r_6 = \frac{l_0}{c_1 t_0} = \frac{l_0 \omega_0}{c_1}, \quad r_7 = \frac{v_0}{c_1} = M_0. \quad (24.26)$$

Решение задач сохраняет вид (24.23), но в число аргументов u_i^* , σ_{ij}^* войдут еще переменная $c_1 t/l_0$ и постоянные r_6 и r_7 (24.26). В линейной динамической теории упругости сохранятся выражения (24.24), но сумма будет по пяти r_n ($n=1, 2, 3, 4, 7$) и функции φ будут иметь аргументы

$$\varphi = \varphi \left(\frac{x}{l_0}, \frac{c_1 t}{l_0}; \nu \right). \quad (24.27)$$

Моделирование динамических явлений на центрифугах уже невозможно, так как кориолисовы ускорения будут вносить искажения. Для моделирования динамики геометрически подобных областей сред созданы *линейные механические ускорители*. Уменьшая линейный размер l_0 натуре в N раз, при неизменных свойствах материала необходимо соблюдение постоянства σ_0 , \mathcal{P}_0/l_0^2 , $\rho_0 g_0 l_0$, u_0/l_0 и еще из (24.26) сохранение v_0 и $l_0 \omega_0 = l_0/t_0$; в дополнение к условиям п. 4 необходимо задавать одинаковыми скорости v_0 и в N раз увеличивать частоту ω_0 (или уменьшать время приложения нагрузки t_0). На рис. 24.1 показан результат испытания на ускорителе $1000 g_0$ ($N=1000$) небольшого бетонного блока на заглубленный взрыв заряда Q около одного грамма тротила.

Блок имел размер L около 20 см, глубина заложения заряда около 6 см. Образовавшаяся после взрыва на линейном ускорителе полость диаметром d около 4 см не вскрылась. Если увеличить линейный масштаб в $N=10^3$, то получим для натуре $L_0 \sim 0,2$ км, $h_0 \sim 60$ м, $d_0 \sim 40$ м, причем необходимый заряд $Q_0 = N^3 Q \sim 1000$ тонн.

6. Примеры решения задач МСС или их упрощения, получаемые на основе π -теоремы (§14, 18, п. 2).

а) Внедрение жесткого конуса с постоянной скоростью v в идеально пластическое несжимаемое невесомое полупространство. Даны плотность среды ρ , предел текучести σ_s , угол раствора конуса α . Вместо времени t примем за независимую переменную глубину погружения $h=vt$. Найдем площадь контакта s и силу сопротивления \mathcal{P} . Полная группа безразмерных параметров: постоянные сводятся к двум $\sigma_s/\rho v^2$ и α ; переменных нет; искомые $\Phi_1 = \mathcal{P}/\rho v^2 h^2$, $\Phi_2 = s/h^2$. Согласно π -теореме Φ_1, Φ_2 зависят только от $\sigma_s/\rho v^2$, т. е. получаем формулы

$$\mathcal{P} = \rho v^2 h^2 \Phi_1 \left(\frac{\sigma_s}{\rho v^2}, \alpha \right), \quad s = h \Phi_2 \left(\frac{\sigma_s}{\rho v^2}, \alpha \right) \quad (24.28)$$

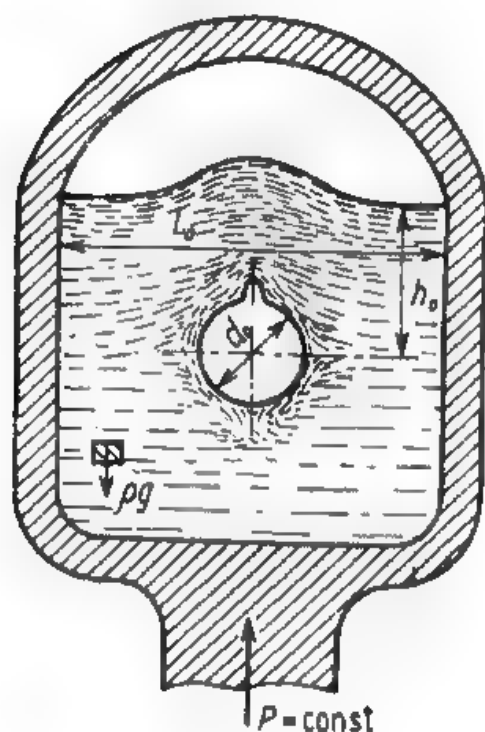


Рис. 24.1

функции Φ_1, Φ_2 можно найти теоретически и из опытов. Для идеальной жидкости $\sigma_s=0$, и потому Φ_1, Φ_2 постоянны (зависят от α).

б) Сосредоточенная сила \mathcal{P} статически действует на границу упругого полупространства по нормали (§ 15); найти перемещение u и напряжения σ_{ij} в любой точке $M(r, \varphi)$ среды, где r, φ — сферические координаты любой точки относительно точки приложения силы, φ — широта. Безразмерные: одна постоянная v ; две переменных $\varphi, \mathcal{P}/2Gr^2$; функции $\Phi_1 = u/r, \Phi_{ij} = \sigma_{ij}/2G$. Следовательно,

$$u = r \Phi_1 \left(\frac{\mathcal{P}}{2Gr^2}, \varphi, v \right), \quad \sigma_{ij} = 2G \Phi_{ij} \left(\frac{\mathcal{P}}{2Gr^2}, \varphi, v \right). \quad (24.29)$$

Но при малых деформациях u и σ_{ij} зависят от \mathcal{P} линейно, следовательно, зависимость решения от r найдена явно:

$$u = r \frac{\mathcal{P}}{2Gr^2} \Phi(\varphi, v) = \frac{\mathcal{P}}{2Gr} \Phi(\varphi, v),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathcal{P}}{r^2} \Phi_{ij}^0(\varphi, v). \quad (24.30)$$

Вектор $\Phi(\varphi, v)$ находится из дифференциального уравнения Ляме (16.10) при $\rho_0=0, \beta=0$, которое приводится к обыкновенному линейному уравнению второго порядка.

в) Ударная волна в полубесконечной цилиндрической трубе с осью x (§ 13). Покоящийся газ с плотностью ρ_1 , давлением p_1 , показателем политропы γ находится справа ($x > 0$) от сечения $x=0$, в котором расположен поршень, начинающий двигаться в момент $t=0$ вдоль оси с постоянной скоростью v_0 . Найти давление на поршень и движение газа, считая состояние его не зависящим от поперечных координат. Заданные константы определяют скорость звука в невозмущенном газе $c_0 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1}$ (§ 13); независимые переменные x, t образуют единственную безразмерную переменную $\zeta = c_0 t / x$, искомые функции — безразмерные $v_0 / c_0, p / p_1$; безразмерные константы сводятся к γ и $M_0 = v_0 / c_0$. По π -теореме имеем

$$v = c_0 \Phi_1(\gamma, M_0, \zeta), \quad \rho = \rho_1 \Phi_2(\gamma, M_0, \zeta), \quad p = p_1 \Phi_3(\gamma, M_0, \zeta), \quad (24.31)$$

т. е. уравнения в частных производных (13.4), (13.6) согласно преобразованиям производных

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\zeta}{t} \frac{d}{d\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\zeta^2}{c_0 t} \frac{d}{d\zeta}$$

становятся обыкновенными

$$\zeta(1 - \zeta v) \frac{dv}{d\zeta} = \frac{\zeta^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\zeta}, \quad \zeta(1 - \zeta v) \frac{dp}{d\zeta} = 0. \quad (24.32')$$

Пренебрегая теплообменом между частицами газа в области течения, находим из (13.29), (13.25)

$$t \frac{ds}{dt} = \zeta(1 - v\zeta) \frac{ds}{d\zeta} = 0, \quad s = c_v \ln \frac{p}{\rho \gamma} + \text{const}. \quad (24.32'')$$

Система трех уравнений (24.32) для трех функций v, ρ, p с начальным условием $\zeta=0$ ($t=0$), $v=v_1=0, p=p_1, \rho=\rho_1$ и граничным условием на поршне: $v=v_0$ при $x=v_0 t$ или при $\zeta=M_0^{-1}$ ($M_0 = v_0/c_0$), имеет два различных решения. При положительной скорости поршня ($v_0 > 0, M_0 > 0$) решение имеет вид ударной волны.

$$v = v_2 = \text{const} = v_0, \quad p = p_2 = \text{const}, \quad (24.33)$$

причем эти постоянные возникают скачком на фронте $x = Dt$ и вместе с D определяются из (12.23), (13.30). При $v_0 < 0$ энтропия не изменяется на фронте $x = c_0 t$, и решение находится из (24.32') при условии $p/p_1 = (\rho/\rho_1)^\gamma$.

Решения задач МСС, получаемые на основе π -теоремы путем уменьшения числа независимых переменных и функций, называются *автомодельными*, например решения (24.28), (24.30), (24.31).

§ 25. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Автомодельные решения задач МСС получаются за счет преобразования координат, времени и искомым функций к новым безразмерным переменным, определяемым методами теории размерностей. При этом не накладывается каких-либо существенных ограничений на вид функционалов \mathcal{F} и операторов H (23.16), их приведение к виду (23.17) всегда возможно и эффективно.

Более общие методы теории групп Ли позволяют находить *максимальную* в рамках этого подхода *группу* непрерывных преобразований независимых переменных и искомым функций, допускаемых системой дифференциальных уравнений, выбирать на ее основе замену переменных, приводящую к упрощениям, и находить классы решений, включая автомодельные.

В классических теориях и некоторых теориях сред со сложными свойствами функционал состояния \mathcal{F} , энтропия s и рассеяние ω^* в лагранжевых координатах — просто функции аргументов A_j^i, B_m^i, D_j^i , выражающихся через $x(x, t)$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} - v^i = 0, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} - A_j^i = 0, \quad \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - D_j^i = 0. \quad (25.1)$$

и температуры

$$S^{mn} = \mathcal{F}^{mn}(A_j^i, D_r^p, T), \quad s = s(A_j^i, T), \\ \omega^* = \omega^*(A_j^i, D_r^p, T). \quad (25.2)$$

Уравнения движения (11.2) и теплопроводности (11.12) приводятся к следующей системе квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $v^i, A_j^i, D_j^i, T, q^i$:

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} - X^i \right) = [(\delta_p^i \delta_n^r + B_p^r A_n^i) \mathcal{F}^{mn} + \mathcal{F}^{mn}_{,A_r^p} A_n^i] \frac{\partial A_r^p}{\partial x^m} + \\ + A_n^i \mathcal{F}^{mn}_{,D_r^p} \frac{\partial D_r^p}{\partial x^m} + A_n^i \mathcal{F}^{mn}_{,T} \frac{\partial T}{\partial x^m}; \quad (25.3)$$

$$\rho T s_{,T} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q^m}{\partial x^m} - q^i B_p^r \frac{\partial A_r^p}{\partial x^i} - \rho T s_{,A_r^p} D_r^p + \omega^*;$$

$$\lambda g^{im} \frac{\partial T}{\partial x^m} = - q^i \quad \left(\rho = \frac{\rho_0}{A} \right).$$

Вместе с (25.1) получилась замкнутая система 28 уравнений относительно 28 искомым функций $x^i, v^i, q^i, T, A_j^i, D_j^i$ ($i, j=1, 2, 3$). Коэффициенты уравнений (25.3) вида $\mathcal{F}^{mn}_{,z}$ и $s_{,z}$ означают част-

ные производные функций (25.2) по соответствующим переменным ($z = A_r^p, D_r^p, T$).

Размерность группы преобразований и связанных с ней возможностей выбора новых параметров, упрощающих систему уравнений, определяется аналитическим представлением функций $\mathcal{F}^{mn}, s, \psi^*, \lambda, \dots$, выбором параметров процессов и независимых переменных, понижающих размерность. Число уравнений в частных задачах может существенно уменьшаться. Например, при малых деформациях и обратимых процессах в случае, если s зависит только от T , задача теплопроводности выделяется в самостоятельную, и последние четыре уравнения системы (25.3) становятся замкнутой системой. Если зависимость между коэффициентом теплопроводности λ , энтропией s и температурой T можно аппроксимировать формулой, содержащей две произвольные постоянные k и k_1 ,

$$\lambda = k_1 \rho_0 T \frac{ds}{dT} e^{k \rho_0 \int_0^s T ds} \quad (25.4)$$

и обозначить

$$\mathcal{T} = k \rho_0 \int_0^s T ds, \quad u^m = -k q^m, \quad \tau = \frac{t}{k_1}, \quad z^m = \frac{x^m}{k_1}, \quad (25.5)$$

то получим систему

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial u^m}{\partial z^m} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z^m} - e^{-\mathcal{T}} \mathcal{T} u^m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \quad (25.6)$$

а в случае одномерной задачи — два уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} - e^{-\mathcal{T}} \mathcal{T} u = 0. \quad (25.7)$$

Теория размерностей, как можно проверить, приводит к двум безразмерным переменным, пропорциональным $\xi = x/\sqrt{t}$ и u/\sqrt{t} , и потому

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\xi), \quad u = \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{\tau}}. \quad (25.7')$$

После этого система (25.7) интегрируется, т. е. находится частное решение (25.7) вида (25.7'). Излагаемый ниже метод в этом примере позволяет найти еще одну существенно отличающуюся от (25.7') замену переменных, также сводящую задачу к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям и связанную с другим элементом группы.

Пусть дана система N квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка по N_x независимым переменным x

относительно N_y неизвестных независимых между собой функций $y(x)$, причем для x всюду примем индексы (i, j) , для $y—(k, l)$

$$x: x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, x^{N_x} \quad (i, j=1, 2, \dots, N_x); \quad (25.8)$$

$$y: y^1, y^2, \dots, y^k, \dots, y^l, \dots, y^{N_y} \quad (k, l=1, 2, \dots, N_y),$$

частные производные y по x обозначим p :

$$p = \frac{dy}{dx} : p_i^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}, \quad p_j^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \dots \quad (25.9)$$

Тогда исходная система квазилинейных уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}_s(x, y, p) &\equiv \tilde{H}_s(x, y) p + H_s^0(x, y) \equiv H_{s,k}^i(x, y) p_i^k + H_s^{i0}(x, y) = 0, \\ s &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Рассмотрим некоторое взаимно однозначное преобразование всех переменных x, y к новым x', y' :

$$\begin{aligned} x' &= f'(x, y) : x'^i = f'^i(x, y), \quad i=1, 2, \dots, N_x; \\ y' &= \mathcal{F}'(x, y) : y'^k = \mathcal{F}'^k(x, y), \quad k=1, 2, \dots, N_y; \end{aligned} \quad (25.11)$$

$$x = f(y', y') : x^i = f^i(x', y');$$

$$y = \mathcal{F}(x', y') : y^k = \mathcal{F}^k(x', y').$$

Подставляя x, y в (25.10), получим преобразованные выражения коэффициентов в переменных x', y' и уравнения

$$\tilde{H}_s(x, y, p) = \hat{H}_s(f, \mathcal{F}) p + H_s^0(f, \mathcal{F}) = \hat{H}_s'(x', y') p + H_s^{i'0}(x', y') = 0 \quad (25.12)$$

Решением (25.10) называется $y=y(x)$, а в новых переменных $y'=y'(x')$, причем $p=dy/dx$, $p'=dy'/dx'$. Дифференцируя по x' при $y'=y'(x')$ равенство $y=y(x)$:

$$\mathcal{F}(x', y') = y(f(x', y')),$$

получим уравнение для определения p через p' :

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dx'} = p \frac{Df}{Dx'}, \quad \frac{D}{Dx'} = \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} p'. \quad (25.13')$$

В компонентах (25.13') означает систему $N_y \cdot N_x$ уравнений для такого же числа p_i^k ($i=1, 2, \dots, N_x, k=1, 2, \dots, N_y$):

$$\frac{D\mathcal{F}^k}{Dx'^i} = p_i^k \frac{Df^j}{Dx'^i}; \quad \frac{D}{Dx'^i} = \frac{\partial}{\partial x'^i} + p_i^{j'} \frac{\partial}{\partial y'^j}. \quad (25.13)$$

Обозначая \mathcal{P} определитель квадратной матрицы $(N_x \times N_x)$

$$\mathcal{P} = |z_i^j|, \quad z_i^j = \frac{Df^j}{Dx'^i} = \frac{\partial f^j}{\partial x'^i} + p_i'^j \frac{\partial f^j}{\partial y'^i}, \quad (25.14)$$

являющийся полиномом N_x степени относительно всех $p_i'^k$, находим все p_i^k :

$$\mathcal{P}(z) p = \hat{\mathcal{P}}(z) \frac{D\mathcal{F}}{Dx'}, \quad \hat{\mathcal{P}}(z) \equiv \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z}; \quad (25.15)$$

$$\mathcal{P}(z) p_i^k = \mathcal{P}_i^k(z) \frac{D\mathcal{F}^k}{Dx'^j}, \quad \mathcal{P}_i^k(z) \equiv \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z_i^j}.$$

Следовательно, уравнения (25.12) принимают вид

$$\hat{H}_s(f, \mathcal{F}) \hat{\mathcal{P}}(z) \frac{D\mathcal{F}}{Dx'} + \mathcal{P}(z) H_s^0(f, \mathcal{F}) = 0, \quad z \equiv \frac{Df}{Dx'}; \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (25.16')$$

Это уравнения в частных производных первого порядка: степени N_x относительно p' ; степени N_x относительно частных производных $\partial f / \partial x'$, $\partial f / \partial y'$; линейные относительно $\partial \mathcal{F} / \partial x'$, $\partial \mathcal{F} / \partial y'$; однородные относительно частных производных f и \mathcal{F} по x' , y' . В координатной записи они имеют вид

$$H_{sk}^i(f, \mathcal{F}) \mathcal{P}_i^k(z) \frac{D\mathcal{F}^k}{Dx'^j} + \mathcal{P}(z) H_s^0(f, \mathcal{F}) = 0; \quad s = 1, 2, \dots, N; \quad (25.16)$$

$$z_i^j \equiv \frac{Df^j}{Dx'^i} \quad k = 1, 2, \dots, N_y; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x.$$

Уравнения (25.16) при удачном частном выборе функций $f(x', y')$, $\mathcal{F}(x', y')$ могут оказаться проще уравнений (25.10); они совпадут при тождественных преобразованиях:

$$x = \overset{0}{f}(x', y') \equiv x', \quad y = \overset{0}{\mathcal{F}}(x', y') \equiv y', \quad (25.17)$$

поскольку в этом случае

$$\overset{0}{z}_i^j = \delta_i^j, \quad \overset{0}{\mathcal{P}} = 1, \quad \overset{0}{\mathcal{P}}_i^j = \delta_i^j; \quad \frac{D\overset{0}{\mathcal{F}}^k}{Dx'^j} = p_j^m \delta_m^k = p_j^k. \quad (25.17')$$

Существенное упрощение \hat{H}_s системы (25.16) сравнительно с (25.10) может происходить только для частных видов \hat{H}_s (25.10), т. е. коэффициентов $H_{sk}^i(x, y)$, $H_s^0(x, y)$. Таким образом, ставится вопрос: каковы все неизвестные преобразования $x = f(x', y')$, $y = \mathcal{F}(x', y')$, при которых данные уравнения (25.10) допускают существенное упрощение, т. е. в виде (25.16) содержат меньшее

($< N_x$) число новых независимых переменных x' , функций y' , либо тех и других?

Существенное упрощение произойдет, если в системе (25.16) пропадет одна из x' , например x^α (α — фиксированное число из $i=1, 2, \dots, N_x$). Для этого необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях (25.16), представляющих полиномы относительно p' степени N_x , коэффициенты при всех одночленах, содержащих p_k^α (при всех $k=1, 2, \dots, N_y$) обратились в нуль и чтобы все остальные коэффициенты и свободные члены не зависели от x^α . Это требование приводит к переопределенной системе дифференциальных уравнений относительно f и \mathcal{F} . Если при данных $H_{sk}^i(f, \mathcal{F})$, $H_s^0(f, \mathcal{F})$ полученная система имеет только тождественное решение $f=f^0 \equiv x'$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}^0 \equiv y'$, то уравнения (25.10) не допускают рассматриваемого упрощения. Перебором чисел можно выяснить другие возможные упрощения этого типа.

Достаточно общий ответ на поставленный вопрос дает теория групп Ли преобразований. Эффективные методы и приложения к дифференциальным уравнениям основаны на взаимно однозначном соответствии между группой Ли непрерывных преобразований (25.11) с вещественными параметрами и алгеброй Ли дифференциальных операторов.

Однопараметрическая непрерывная локальная группа преобразований (25.11) с вещественным параметром λ , изменяющимся в некотором интервале, содержащем точку $\lambda=0$,

$$x' = \varphi(x, y, \lambda), \quad y' = \psi(x, y, \lambda), \quad (25.18')$$

$$\varphi(x, y, 0) = x, \quad \psi(x, y, 0) = y,$$

может быть определена заданием N_x функций $\xi^i(x, y)$ и N_y функций $\eta^k(x, y)$. Соответствие между группой преобразований (25.18') и координатами $\xi^i(x, y)$, $\eta^k(x, y)$ ее оператора устанавливается следующей теоремой Ли.

Функции φ^i , ψ^k , задающие группу преобразований (25.18'), удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру λ с начальными условиями при $\lambda=0$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial \lambda} = \xi^i(x', y'), \quad \frac{\partial y'^k}{\partial \lambda} = \eta^k(x', y'), \quad (25.18)$$

$$x'^i|_{\lambda=0} = x^i, \quad y'^k|_{\lambda=0} = y^k.$$

Обратно, для любых гладких функций $\xi^i(x, y)$ и $\eta^k(x, y)$ и любой точки (x, y) решение задачи (25.18) определяет однопараметрическую группу преобразований (25.18').

Инвариантом группы преобразований (25.18') называется функция $Y(x, y)$, если для любых (x, y) и λ из области их изменения выполняется

$$Y(x', y') = Y(x, y). \quad (25.19')$$

Функция $Y(x, y)$ является инвариантом группы преобразований (25.18') тогда и только тогда, когда

$$\xi^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial Y}{\partial y^k} = 0. \quad (25.19'')$$

Дифференцируя (25.19') по λ и используя (25.18), получим

$$\frac{dY}{d\lambda} = \frac{\partial Y}{\partial x^i} \frac{\partial x'^i}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial y^k} \frac{\partial y'^k}{\partial \lambda} = \xi^i(x', y') \frac{\partial Y}{\partial x'^i} + \eta^k(x', y') \frac{\partial Y}{\partial y'^k} = 0, \quad (25.19''')$$

т. е. если $Y(x, y)$ — инвариант группы (25.18'), то выполняется (25.19). Обратно, если выполнено (25.19), то $\frac{dY}{d\lambda} = 0$, т. е. $Y(x', y')$ не зависит от параметра λ и равен его значению при $\lambda = 0$, т. е. выполняется (25.19').

Уравнение (25.19) имеет $N_x + N_y - 1$ полных интегралов, которые являются независимыми инвариантами $Y_q(x', y') = Y_q(x, y)$ ($q = 1, 2, \dots, N_x + N_y - 1$), причем любая их функция также будет инвариантом (зависимым).

Многообразие ψ , регулярно заданное уравнениями

$$\psi^s(x, y) = 0 \quad (s = 1, \dots, m), \quad (25.20)$$

называется инвариантным многообразием группы (25.18'), если для любых (x, y) , удовлетворяющих уравнениям (25.20) и при любом λ выполняется

$$\psi^s(x', y') = 0 \quad (s = 1, \dots, m). \quad (25.20')$$

Многообразие (25.20) — инвариантное многообразие группы (25.18') тогда и только тогда, когда

$$\left(\xi^i \frac{\partial \psi^s}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial \psi^s}{\partial y^k} \right)_\psi = 0 \quad (s = 1, \dots, m). \quad (25.20'')$$

Свойство инвариантности используется для отыскания группы преобразований, допускаемых исходной системой уравнений, и для отыскания различных классов частных решений.

Для отыскания группы система уравнений $\dot{H}_s = 0$ (25.10) рассматривается как инвариантное многообразие в пространстве переменных $x^i, y^k, p_k^i = \frac{dy^i}{dx^k}$ (дифференциальное инвариантное многообразие). Критерий инвариантности записывается в виде

$$\left(\xi^i \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial y^k} + \zeta_i^k \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial p_i^k} \right)_{\tilde{H}_s=0} = 0, \quad (25.21)$$

где в отличие от (25.20'') функции $\zeta_i^k(x, y, p)$ вследствие зависимости p_i^k от x, y вычисляются через ξ^i, η^k , и приводит к системе уравнений для функций ξ^i, η^k

$$(i, j=1, 2, \dots, N_x; \quad k=1, 2, \dots, N_y; \quad s=1, 2, \dots, N)$$

$$\xi^i \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial y^k} + \left(\frac{D\eta^k}{Dx^i} - p_i^k \frac{D\xi^j}{Dx^i} \right) \frac{\partial \tilde{H}_s}{\partial p_i^k} = 0, \quad (25.21')$$

где

$$\zeta_i^k = \frac{D\eta^k}{Dx^i} - p_i^k \frac{D\xi^j}{Dx^i}, \quad \frac{D}{Dx^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i^l \frac{\partial}{\partial y^l}. \quad (25.21'')$$

Вывод (25.21'') принципиально не отличается от вывода (25.13').

Левая часть (25.21') — полная неоднородная квадратичная форма относительно p_i^k .

Развернутая запись (25.21'):

$$\begin{aligned} \xi^i \frac{\partial H_s^0}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial H_s^0}{\partial y^k} + H_{sk}^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \left(\xi^j \frac{\partial H_{sk}^i}{\partial x^j} + \eta^l \frac{\partial H_{sk}^i}{\partial y^l} + H_{sl}^i \frac{\partial \eta^l}{\partial y^k} - H_{sk}^l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \right) p_i^k - \\ - H_{sk}^l \frac{\partial \xi^j}{\partial y^l} p_j^k p_i^l = 0. \end{aligned} \quad (25.21''')$$

В системе (25.21) исключается N произвольных p_i^k , которые находятся через остальные p_j^l из N уравнений (25.10) и требуется, чтобы полученные таким образом N уравнений тождественно выполнялись при любых оставшихся p_j^l . Таким образом, получается сильно переопределенная система N_{xy}

$$N_{xy} = \frac{N}{2} (N_1 + 1) (N_1 + 2), \quad N_1 \equiv N_x N_y - N,$$

однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно $N_x + N_y$ функций $\xi^i(x, y), \eta^k(x, y)$ с коэффициентами, зависящими от $H_s^0(x, y), H_{sk}^i(x, y)$ и их первых частных производных по x, y . Эта система N_{xy} уравнений всегда имеет хотя бы одно решение

$$\xi^i = 0, \quad \eta^k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N_x; \quad k=1, 2, \dots, N_y),$$

которому согласно (25.18) соответствует тождественное преобразование (25.17).

Если существует n других, линейно независимых решений системы N_{xy} уравнений (ξ_v^i, η_v^k) , $v=1, 2, \dots, n < N_x + N_y$, то из (25.18) для каждого v имеем

$$\frac{dx'^i}{d\lambda^v} = \xi_v^i(x', y'), \quad \frac{dy'^k}{d\lambda^v} = \eta_v^k(x', y'); \quad (25.22)$$

$$\lambda^v = 0, \quad x'^i = x^i, \quad y'^k = y^k, \quad v=1, 2, \dots, n,$$

и решение этих уравнений представляет n -параметрическую группу Ли преобразований, которую допускает система (25.10).

Преобразования n -параметрической группы получаются перемножением преобразований однопараметрических групп.

Изучаемую исходную систему уравнений можно не приводить к виду (25.10), вычисляя при составлении системы уравнений для $\xi^i(x, y)$, $\eta^k(x, y)$ значения соответствующих величин через ξ^i , η^k для преобразования вторых производных и т. д.

Известная группа преобразований позволяет найти классы частных решений, получаемых из системы уравнений меньшей размерности.

Пусть известна n -параметрическая группа преобразований, допускаемых системой (25.10)

$$x'^i = \varphi'^i(x, y, \lambda) \equiv \varphi'^i(x, y; \lambda^1, \dots, \lambda^n), \quad y'^k = \psi'^k(x, y, \lambda); \quad (25.23)$$

$$x^i = \varphi^i(x', y', \lambda), \quad y^k = \psi(x', y', \lambda)$$

или функции $\xi_v^i(x, y)$, $\eta_v^k(x, y)$ ($v=1, 2, \dots, n$).

На основании (25.22), (25.23) получаем

$$\frac{dY^v}{d\lambda^v} \equiv \frac{dY^v}{dx'^i} \xi_v^i(x', y') + \frac{\partial Y^v}{\partial y'^k} \eta_v^k(x', y') = 0, \quad v=1, 2, \dots, n. \quad (25.24)$$

Критерий инварианта (25.19) принимает вид системы дифференциальных уравнений.

Классы решений, инвариантных относительно подгрупп группы (25.23), связаны с числом функционально независимых решений этой системы, т. е. с рангом матрицы $\|\xi_v^i, \eta_v^k\|$.

Для однопараметрической подгруппы, заданной ξ_v^i, η_v^k , при фиксированном v , базис инвариантов Y_q^v ($q=1, 2, \dots, N_x + N_y - 1$), независимых по отношению к переменным y , позволяет построить преобразование (25.25), где за новые переменные выбраны инварианты подгруппы v :

$$x'^{iq} = Y_q^v(x', y'), \quad x^a = x', \quad (25.25)$$

$$y'^k = Y_p^v(x', y').$$

Поскольку любая функция инвариантов Y_q^v при фиксированном v есть инвариант, то в (25.25) вместо Y_q^v , Y_p^v можно выбирать удобные их комбинации.

Существенное упрощение системы (25.10) при преобразовании типа (25.25) с фиксированным v состоит в том, что в виде (25.16) уравнения будут содержать $N_x - 1$ независимую переменную, т. е. на единицу меньше, и определяют частное решение системы индекса v .

Применительно к задаче теплопроводности (система (25.7)) одно из двух существенных упрощений, получаемых из системы (25.21'') и (25.7), приводит к автомодельному решению (25.7'), другое дает следующую связь между функциями:

$$\xi^i, \eta^k (i=1, 2; k=1, 2) \quad \text{при } x^1=z, x^2=\tau, y^1=\mathcal{T}, y^2=u, \quad (25.26)$$

$$\xi^1=z\xi^2, \quad \eta^1=2\xi^2, \quad \eta^2=u\xi^2.$$

Уравнение (25.19'')

$$z \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial Y}{\partial \mathcal{T}} + u \frac{\partial Y}{\partial u} = 0$$

приводит к системе уравнений

$$\frac{dz}{z} = d\tau = + \frac{d\mathcal{T}}{2} = \frac{du}{u}, \quad (25.27)$$

которые имеют полные интегралы

$$Y_1 = ze^{-\tau}, \quad Y_2 = \mathcal{T} - 2\tau, \quad Y_3 = ue^{-\tau}.$$

Принимая их за новые переменные $\tau'=\tau$, $z'=\xi$, $T'=\theta$, $u'=v$,

$$\xi = ze^{-\tau}, \quad \theta(\xi) = \mathcal{T} - 2\tau, \quad v(\xi) = ue^{-\tau}, \quad (25.28)$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 2, \quad v = e^{\theta} \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (25.29)$$

Как видим, громоздкость преобразований оправдывается существенными упрощениями при получении фундаментальных частных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.
2. Больцман Л. Лекции по теории газов. М.: ГИТТЛ, 1956.
3. Гиббс Дж. Термодинамические работы. М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
4. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965.
5. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1954.
6. Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
7. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979.
8. Дэй У. А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.
9. Eringen A. C. Mechanics of Continua. N. Y.: Wiley, 1967.
10. Maugin G. A., Eringen A. C. On the equations of the electrodynamics of deformable bodies of finite extent//J. de Mecanique. 1977. V. 16, N 1.
11. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Мир, 1965.
12. Ильюшин А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
13. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
14. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.
15. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
16. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластичного тела//Ученые записки Моск. гос. ун-та. Механика. 1940. Вып. XXXIX. С. 3—81.
17. Iljouchine A. A. Plasticité. (Déformations élastico-plastiques). Paris: Eyrolles, 1956.
18. Iljuzyn A. A., Łomakin W. A., Szmakow A. P. Mechanika ośrodków ciągłych w zadaniach i ćwiczeniach. Warszawa, 1987.
19. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. М.: Наука, 1970.
20. Ильюшин А. А., Ломакин В. А., Шмаков А. П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973.
21. Ключников В. Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
22. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
23. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М.: Физматгиз, 1963.
24. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
25. Кутилин Д. И. Теория конечных деформаций. М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
26. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Г. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.
27. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
28. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

31. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
32. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
33. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
34. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. М.: Наука, 1968.
35. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972.
36. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.
37. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
38. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
39. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.
40. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
41. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
42. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.—М.: Гостехиздат, 1948.
43. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
44. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электромагнитных тел. М.: Наука, 1988.
45. Победра Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
46. Победра Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
47. Постников М. М. Лекции по геометрии. Ч. I. Аналитическая геометрия. Ч. II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1975.
48. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально-пластических тел. М.: ИЛ, 1956.
49. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1964.
50. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
51. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
52. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
53. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
54. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1983, 1984.
55. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955.
56. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
57. Схоутен Я. Л. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
58. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972.
59. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
60. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математическая теория неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
61. Хейз У. Д., Пробстия Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
62. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
63. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford, 1983.
64. Hill R. Handbuch der Physik, 33, Springer, 1965. (Нелинейная теория поля).
65. Цянь Сюэ-Сэнь. Физическая механика. М.: Мир, 1965.
66. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
67. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости. Л.: Машиностроение, 1986.
68. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Киев, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I	
Система частиц и континуум	6
§ 1. О статистическом описании динамики системы	8
Функция и уравнения Гамильтона (10). Идеи метода статистической механики (13). Уравнение Лиувилля (15). Среднее статистическое функции (16). Простые замкнутые системы. Фазовое пространство (18). Равновесный ансамбль (20). Канонический ансамбль Гиббса (23). Макроскопическая плотность, скорость (24). Уравнение сохранения импульса (26). Метод кинетических уравнений (31).	
§ 2. Термодинамика замкнутых равновесных систем	37
Равновесный процесс (38). Энтропия, свободная энергия (41, 42). Уравнения состояния. Интеграл состояний (42, 43). Идеальный газ (45). Одномерная модель монокристалла (47).	
Глава II	
Кинематика и внутренние напряжения	50
§ 3. Основные понятия и уравнения МСС. Лагранжево и эйлерово представления движения	50
Плотность, скорость, неизменная масса среды (51, 52). Тривектор или тензор внутренних напряжений (56). Термодинамические соотношения (58). Теплообмен (59). Замкнутая система уравнений, физически возможные решения (60). Метод Лагранжа (64). Метод Эйлера (64).	
§ 4. Деформация окрестности точки сплошной среды	67
Аффинные преобразования окрестности точки (69, 70). Тензор деформации лагранжева базиса (72). Деформация физических площадок, объемов (73—75). Физический смысл компонент деформаций, их выражение через вектор перемещения (76—79). Инварианты тензора деформаций, главные оси деформаций (79—80).	
§ 5. Конечные, малые и бесконечно малые деформации	82
Условия совместности деформаций (82—84). Тензор скоростей деформаций, малых деформаций, свойства аддитивности (85—87). Девиатор и шаровой тензор, октаэдрический сдвиг, интенсивность де-	

формаций (89). Линии тока, трубка тока, потоки массы и вихря через поверхность (92—93).

§ 6. Теория напряжений 94

Вектор истинного внутреннего напряжения — линейная функция нормали (96). Симметрия тензора напряжений Коши — Лагранжа (97). Условные напряжения (98—99). Октаэдрическое напряжение, девиатор (103). Выражения главных напряжений (106).

§ 7. Напряжения и деформации в произвольных координатах . . . 106

Преобразование компонент тензора напряжений (109). Тензор деформаций в различных системах координат (111). Ковариантные производные вектора и тензора (112—113). Производная по времени тензора деформации (115).

Глава III

Физические законы и постановка задач механики сплошной среды . . 117

§ 8. Уравнения движения 117

Дивергенция тензора напряжений, динамические уравнения Эйлера — Коши (118). Общие теоремы о движении конечной массы (120, 121). Объемная плотность мощности внутренних сил (122). Теорема о кинетической энергии (123). Вариационный принцип, обобщенная постановка задач МСС (124).

§ 9. Процессы деформации, нагружения и другие 125

Физически ориентированный репер (127). Ориентация среды. Преобразование оператора (127, 128). Функционал процесса (129). Интерполяционный полином Лагранжа (131). Функционал как предел функции многих переменных. Аналитический процесс. Аналитический функционал (131, 132). Операции дифференцирования и интегрирования тензоров в лагранжевых и эйлеровых пространствах (133). Тензор скорости напряжений (136). Соотношения типа упругости и вязкости (138). Пространство вектора деформаций (139).

§ 10. Основной постулат МСС и термодинамика 141

Постулат макроскопической определенности. Процесс и реакция (143). Функционал энтропии (144). Механическая энергия и тепловыделение (145). Уравнения распространения тепла. Закон сохранения энергии (145). Основное термодинамическое тождество (146). Уравнение теплопроводности. Уравнение баланса энтропии (147). Макрообратимые термомеханические процессы (148). Термодинамическое тождество необратимых процессов (150). Вариационный термодинамический принцип (154). Интегральная форма первого и второго законов (156).

§ 11. Замкнутые системы уравнений МСС 157

Уравнения МСС в лагранжевых координатах (158, 161). Уравнения МСС в эйлеровом пространстве (162—164). Взаимосвязь постановок задач в лагранжевом и эйлеровом пространстве. Идеально изотропная среда (164—166). Разностно-интегральные уравнения МСС (166).

§ 12. Условия на границах тел и поверхностях разрывов	168
Механические граничные условия (169). Температурные граничные условия (170). Начальные условия (171). Поверхности разрывов (171). Кинематические условия (174). Динамические условия (175). Обратимость функционала состояния. Особые случаи (175). Эквивалентность механических граничных условий (177). Линеаризация задач МСС. Вариационная постановка (179).	
Глава IV	
Классические теории. Аэрогидродинамика и теория упругости	181
§ 13. Идеальные жидкости и газы	182
Уравнения Эйлера в лагранжевых координатах (184). Несжимаемая жидкость. Баротропная жидкость (185). Идеальный газ (186). Интеграл Лагранжа. Интеграл Бернулли (189).	
§ 14. Вязкие жидкости	189
Уравнения Навье—Стокса (193). Уравнения вязкой жидкости в лагранжевых координатах (195).	
§ 15. Линейная теория упругости	199
Уравнения Ляме (201). Объемные и сдвиговые волны (203). Однородное анизотропное тело (204).	
§ 16. Нелинейная теория упругости	209
Свободная энергия изотропного упругого тела (211). Условия существования потенциала (212). Представление упругого потенциала через главные кратности деформации (214).	
Глава V	
Среды со сложными свойствами	217
§ 17. Простейшие математические модели сред со сложными свойствами	217
Векторные и скалярные свойства. Нелинейновязкие жидкости (218, 219). Жесткопластическая и вязкопластическая среда (220, 222). Идеальная сыпучая среда (222). Условия Сильвестра (223).	
§ 18. Определяющие соотношения начально изотропной среды	224
Преобразования вращения и отражения в E_6 , инварианты преобразования; длина дуги, кривизны, формулы Френе (225—227). Начально изотропное тело (228). Общий постулат изотропии; частный постулат изотропии (231). Приближенные определяющие соотношения в E_5 (232).	
§ 19. Упругопластические деформации начально изотропных тел	233
Теория малых упругопластических деформаций (234). Теория пластического течения (238). Постулат пластичности (239). Ассоциированный закон текучести. Теория Прандтля—Рейсса (240, 241). Теория течения для конечных деформаций (241).	
§ 20. Линейная теория вязкоупругости	242
Модель Максвелла (246). Связная задача вязкоупругости (249).	

§ 21. Динамика сверхзвуковых течений	249
Асимптотические уравнения состояния. Закон плоских сечений (250, 251). Случаи установившегося (252), неустановившегося (257) движения. Вариант постановки задач сверхзвуковой аэродинамики для тонких тел (258). Линеаризованная теория (261).	
§ 22. Влияние электромагнитного поля	262
Уравнения Максвелла (263, 264). Пондеромоторная сила (266). Электронная теория Лоренца (272—273). Эрингена—Може теория пондеромоторных сил (270—272). Пьезоэлектрические свойства (272—273). Электромагнитные граничные условия (275). Магнитная гидродинамика (276).	
Глава VI	
Методы теории размерностей	278
§ 23. Основы теории размерностей и подобия	278
Преобразование масштаба (280). Преобразование структуры (281). Система единиц СИ (282). π -теорема размерности (284). Параметры подобия (287). Ревизионный анализ (287).	
§ 24. Примеры ревизионного анализа и некоторые задачи	287
Изотермические задачи (287). Параметр Фруда (290). Параметр Коши, число Маха (290). Число Рейнольдса (291). Центрифуга; среды со склерономными свойствами. Скорость звука (292). Линейные механические ускорители. Примеры решения задач МСС на основе π -теоремы (293). Волна в полубесконечной трубе. Автомодельные решения (295).	
§ 25. Квазилинейные уравнения и общие преобразования	295
Общие преобразования аргументов, функций и производных (298—300). Группа Ли преобразований (300—303). Пример задачи теплопроводности (304).	
Литература	305

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Ильюшин Алексей Антонович
МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Зав. редакцией *Н. М. Глазкова*
Редактор *Л. А. Николова*
Художественный редактор *Л. В. Мухина*
Художник *И. И. Синько*
Технический редактор *О. В. Андреева*
Корректоры *М. И. Эльмус, Н. В. Иванова*

ИБ № 3651

Сдано в набор 28.12.89. Подписано в печать 15.08.90.

Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2

Гарнитура литературная Печать высокая

Усл. печ. л. 19,5 Уч.-изд. л. 19,09

Тираж 6830 экз. Заказ 228. Изд. № 833

Цена 95 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского
университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы.